

Е.Б. Ипатов<sup>1</sup>  
С.П. Кузнецов<sup>2</sup>  
И.В. Мешков<sup>3</sup>  
А.В. Шелагин<sup>4</sup>

E.B. Ipatov  
S.P. Kuznetsov  
I.V. Meshkov  
A.V. Shelagin

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ РАССЕЯНИЯ ОЧЕНЬ ХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ НА СПЛОШНОМ БЕСКОНЕЧНОМ КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

## NUMERICAL SIMULATION OF THE DIFFERENTIAL SCATTERING CROSS SECTIONS OF VERY COLD NEUTRONS BY THE INFINITE SOLID CIRCULAR CYLINDER

Данная работа продолжает разработку методики определения параметров неоднородностей в неоднородных средах с помощью очень холодных нейтронов (ОХН). В работе приведены дифференциальные сечения рассеяния ОХН на сплошном бесконечном круговом цилиндре. Они были вычислены в первом борновском приближении и на основе построения точного решения уравнения Шрёдингера методом разделения переменных. Проведено сравнение значений дифференциального сечения рассеяния, рассчитанных с помощью этих методов, при различных значениях скоростей ОХН, для тестового образца – цилиндра с радиусом  $R = 25$  нм и оптическим ядерным потенциалом  $U = 1,81 \cdot 10^{-7}$  эВ.

**Ключевые слова:** нейтронная оптика, ядерный оптический потенциал, длина волны де Бройля, дифференциальные сечения рассеяния, численное моделирование.

The given work continues to develop a technique of definition the parameters for the inhomogeneities in non-uniform environments by means of very cold neutrons (VCN). In the work the differential scattering cross sections of VCN by the infinite solid circular cylinder are given. They were calculated in the first Born's approximation and based on the construction of the exact decision of the equation of Schrödinger by a method of division of variables. We compare the values of the differential scattering cross sections, calculated by these methods, for the various velocity of VCN, for the test sample – a cylinder with a radius  $R = 25$  nm and optical nuclear potential  $U = 1,81 \cdot 10^{-7}$  eV.

**Keywords:** neutron optics, nuclear optical potential, de Broglie wave length, differential scattering cross sections, numerical simulation.

### Введение

Макроскопические свойства вещества, такие, как теплопроводность, электропроводность,

<sup>1</sup> Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры информационных технологий и естественно-научных дисциплин НОУ ВПО «Российский новый университет», старший научный сотрудник, доцент кафедры «Общей физики» Московского физико-технического института (государственный университет).

<sup>2</sup> Кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник нейтронно-физического отдела Физического института Российской академии наук им. П.Н. Лебедева (ФИАН).

<sup>3</sup> Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник нейтронно-физического отдела Физического института Российской академии наук им. П.Н. Лебедева (ФИАН).

<sup>4</sup> Доктор физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Московского физико-технического института (государственный университет).

прочность, эластичность и т.д., зависят в основном от элементов структуры с характерными размерами от единиц до сотен нанометров. В последние годы повышенный интерес вызывает получение полимерных нанокомпозитов, содержащих наноразмерные наполнители. Введение углеродных наполнителей в полимерную матрицу является перспективным направлением в процессе создания новых материалов с улучшенными свойствами. Использование многослойных углеродных нанотрубок должно привести к созданию многофункционального материала с высоким модулем упругости и большой электропроводностью и теплопроводностью [1].

Очень холодные нейтроны (ОХН) – нейтроны, двигающиеся в вакууме со скоростями  $5 < v_n < 100$  м/с, т.е. с энергиями  $5 \cdot 10^{-7} < \varepsilon_n < < 5 \cdot 10^{-5}$  эВ и длиной волны де Бройля  $1 < \lambda_v < 100$  нм, являются уникальным инстру-

ментом исследования наноструктурированных материалов, поскольку эффективно и на большие углы рассеиваются на таких структурах. При таких энергиях отчетливо проявляются волновые свойства нейтрона, при взаимодействии нейтронной волны с препятствием меняется состояние ОХН, состояние же мишени не изменяется. Теоретические и экспериментальные исследования, выполненные в работах [2–6], показали, что рассеяние ОХН определяется размером, концентрацией и формой рассеивающих частиц, параметрами распределения частиц наполнителя в полимерной матрице. Для изучения наноструктурированных материалов проводится исследование зависимостей сечений упругого некогерентного рассеяния ОХН от длины волны нейтрона, получаемых при пропускании пучка нейтронов через образец («метод ослабления»). Этот метод позволяет получить информацию о наноструктуре исследуемых материалов (см. [6] и указанные там ссылки).

Он дополняет хорошо развитые методы малоуглового рассеяния рентгеновских лучей (МУРРЛ) и малоуглового рассеяния нейтронов (МУРН). Анализ экспериментальных результатов, полученных этими методами, основан на борновском приближении теории возмущений, поскольку есть малый параметр в задаче; например, в методе МУРН это параметр  $U/\varepsilon_H$ , где  $U$  – рассеивающий потенциал,  $\varepsilon_H$  – энергия налетающего на мишень нейтрона. Для тепловых нейтронов ( $\varepsilon_H \approx 0.025$  эВ) этот параметр  $\sim 10^{-4}$ . В случае ОХН существует область энергий, когда энергия нейтрона  $\varepsilon_H$  близка к граничной энергии  $U_{sp}$ , при которой происходит полное внешнее отражение и  $U/\varepsilon_H \approx 1$ . В этом случае в качестве малого параметра задачи следует выбрать параметр  $\xi \equiv (U/\varepsilon_H) \cdot ka < 1$ . Здесь  $k = 2\pi/\lambda_v$  – это волновое число,  $a$  – характерный размер неоднородности,  $\lambda_v$  – длина волны де Бройля. Цель настоящей работы – рассмотреть и сравнить поведение решений задачи рассеяния – точного решения и первого борновского приближения для ОХН.

### Теория

Метод ослабления ОХН заключается в следующем. При прохождении пучка нейтронов через образец толщиной  $t$  интенсивность пучка меняется по закону  $I = I_0 \exp(-t\Sigma_t)$ , где  $\Sigma_t = \Sigma_a + \Sigma_{inel} + \Sigma_{incog} + \Sigma_{el}$ .

Здесь  $I_0$  – интенсивность падающего пучка;  $\Sigma_t$  – полное макроскопическое сечение взаимодействия ОХН с веществом образца;  $\Sigma_a$  – макроскопическое сечение поглощения ( $\Sigma_a = n\sigma_a$ ,

$n$  – плотность рассеивателей,  $\sigma_a$  – это микроскопическое сечение поглощения);  $\Sigma_{inel}$  и  $\Sigma_{incog}$  – макроскопические сечения неупругого и некогерентного рассеяния вследствие изотопического и спинового разупорядочения;  $\Sigma_{el}$  – макроскопическое сечение упругого рассеяния, соответственно.

Величина  $\Sigma_{el}$  может быть получена из значения  $\Sigma_t$ , если известен атомный состав образца и если возможно подавить  $\Sigma_{inel}$  охлаждением образца. Количество нейтронов, рассеянных в телесный угол  $4\pi - \Omega_{dem}$  ( $\Omega_{dem}$  – телесный угол, под которым виден детектор из мишени), равно  $(I_0 - I)$ . Задача сводится к определению усредненного по возможным ориентациям упругого сечения рассеяния рассеивателя. При вычислении  $\Sigma_{el}$  прежде всего используется борновское приближение, если удовлетворяется критерий  $\xi = (U/\varepsilon_H) \cdot ka \ll 1$  [7]. Здесь  $a$  – характерный размер рассеивателя (для шара, например, это радиус);  $k$  – волновое число налетающего нейтрона;  $U$  – оптический ядерный потенциал:  $U = (\hbar^2/2m) \cdot 4\pi \sum_i N_i b_i$ . Здесь  $N_i$  – плотность ядер  $i$ -го вида,  $b_i$  – длина когерентного рассеяния  $i$ -го ядра,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $m$  – масса нейтрона. Параметры  $U$  и  $\varepsilon_H$  определяют в нейтронной оптике показатель преломления  $n^2 = 1 - U/E = 1 - 4\pi \sum_i N_i b_i / k^2$ . Здесь длина когерентного рассеяния  $b_i = -f_i$ ,  $f_i$  – амплитуда упругого рассеяния на  $i$ -ом ядре,  $b_i > 0$  для большинства элементов периодической таблицы.

Для ОХН область значений, которые может принимать  $n$ , при рассеивании в вакууме:  $0 \leq n \leq 1$ . Для нейтрона в вакууме  $n = 1$ ;  $n = 0$  – полное внешнее отражение; при  $k^2 \leq 4\pi \sum_i N_i b_i$  – это ультрахолодные нейтроны. Изменение фазы волны де Бройля, проходящей сквозь рассеиватель, например сквозь шар вдоль диаметра, равно  $\rho = 2ak|n-1| = 2x|n-1|$ . Процессы рассеяния оказываются совершенно различными в зависимости от того, велики или малы фазовые сдвиги по сравнению с единицей. Приближения, основанные на предположении, что фазовые сдвиги малы, в квантовой механике называются приближением Борна. В оптике существует строгая теория, достаточно хорошо описывающая область  $1 \pm \varepsilon \leq n < \infty$ , – это теория Ми [8; 9]. В нашем случае область изменения показателя преломления  $0 \leq n \leq 1$ . Если  $n = 1$ , то преломления, отражения и дифракции нет. С уменьшением скорости нейтрона показатель преломления также уменьшается:  $n \rightarrow 0$ ,  $|n-1| \rightarrow 1$ ; вблизи  $n \approx 0$  возможен оптический резонанс.

В области достаточно больших  $\mathbf{r}$  ( $\mathbf{r}$  – это рас-

стояние от рассеивателя до точки наблюдения), где оптический ядерный потенциал  $V(\mathbf{r}) = 0$ , уравнение Шрёдингера сводится к скалярному волновому уравнению. Нанотрубки можно описывать как цилиндры, длина которых во много раз превосходит диаметр.

Построим точное решение задачи рассеяния на бесконечном сплошном круговом цилиндре радиуса  $R$ .

Пусть однородная плоская волна  $\psi_i = \exp(ik\mathbf{e}_i \mathbf{x})$ , распространяющаяся в направлении вектора  $\mathbf{e}_i = -\sin\zeta \mathbf{e}_x - \cos\zeta \mathbf{e}_z$ , падает на бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса  $R$ . Ось цилиндра совпадает с осью OZ прямоугольной системы координат  $(x, y, z)$ . Вектор  $\mathbf{e}_i$  лежит в плоскости  $(x, z)$ , образуя с осью  $z$  угол  $\zeta$ . Волновой вектор  $\mathbf{k}_s$  рассеянной волны лежит в плоскости, проходящей через ось  $z$ . Запишем уравнение Шрёдингера в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ :

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \psi(r, \varphi, z) = 0. \quad (1)$$

В методе разделения переменных однозначные по  $\varphi$  решения (1) имеют вид

$$\psi_n(r, \varphi, z) = Z_n(\rho) e^{in\varphi + ihz}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где  $\rho = r\sqrt{k^2 - h^2}$ , а  $Z_n$  – решение уравнения Бесселя

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} Z_n \right) + (\rho^2 - n^2) Z_n = 0. \quad (3)$$

Линейно-независимыми решениями уравнения (3) являются функции Бесселя первого и второго рода ( $J_n$  и  $Y_n$ ) с целочисленными значениями индекса  $n$ . Значение величины  $h$  определяется из граничных условий на поверхности цилиндра. Используя разложение по собственным функциям и граничные условия на поверхности цилиндра, получим для падающей волны  $\psi_i$ , внутренней волны  $\psi_1$  и рассеянной волны  $\psi_s$  выражения:

$$\psi_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(kr \sin \zeta) e^{in\varphi - ik \cos \zeta z}, \quad (4)$$

$$\psi_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (-i)^n J_n(kr \sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta}) e^{in\varphi - ik \cos \zeta z}, \quad (5)$$

$$\psi_s(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n (b_n / 2) H_n^{(1)}(kr \sin \zeta) e^{in\varphi - k \cos \zeta z}. \quad (6)$$

Здесь мы заменили коэффициент преломления  $n$  традиционным коэффициентом  $m$ , для того чтобы сохранить обычные обозначения и индексы в цилиндрических координатах для функции  $J_n$  и функции  $H_n^{(1)}$ , и ввели множитель

$1/2$  для удобства. Так как при упругом рассеянии число частиц сохраняется, то имеем

$$|1 + \tilde{b}_n|^2 = 1, \quad \tilde{b}_n = e^{2i\delta_n} - 1, \quad \tilde{b}_n = \frac{b_n}{2}. \quad (7)$$

Здесь  $\delta_n$  – фазовый сдвиг. Амплитуда рассеяния  $f(\varphi)$  определяется из соотношения

$$u_s \equiv \psi_i + \psi_s - e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \rightarrow f(\varphi) \frac{e^{ikr \sin \zeta}}{\sqrt{r}}, \quad (8)$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k \sin \zeta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (b_n / 2) e^{in\varphi - i\pi/4 - ik \cos \zeta z}. \quad (9)$$

Коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  находятся из граничных условий

$$\psi_i(R) + \psi_s(R) = \psi_t(R),$$

$$[\partial / \partial r (r \cdot \psi_i(r) + r \cdot \psi_s(r))]_{r=R} = [\partial / \partial r (r \cdot \psi_t(r))]_{r=R}.$$

Здесь  $R$  – это радиус цилиндра. Используя тождество

$$J_{n-1}(x)H_n^{(1)}(x) - J_n(x)H_{n-1}(x) = 2 / \pi i x, \quad (10)$$

можно получить

$$a_n = \frac{J'_n(x)H_n^{(1)}(x) - J_n(x)H_n^{(1)'}(x)}{m^* J'_n(x')H_n^{(1)}(x) - J_n(x')H_n^{(1)'}(x)} = \frac{2 / \pi i x}{m^* J'_n(x')H_n^{(1)}(x) - J_n(x')H_n^{(1)'}(x)}, \quad (11)$$

$$\tilde{b}_n = \frac{m^* J'_n(x')J_n(x) - J_n(x')J'_n(x)}{m^* J'_n(x')H_n^{(1)}(x) - J_n(x')H_n^{(1)'}(x)}. \quad (12)$$

В формулах (10), (11) и (12) введены обозначения  $x' = kR\sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta}$ ,  $x = kR \sin \zeta$ ; штрих означает дифференцирование  $J_n$  и  $H_n^{(1)}$  по аргументу функции;  $m^* \equiv x' / x = \sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta} / \sin \zeta$ ,  $m^2 = 1 - U / E = 1 - 4\pi \sum_i N_i b_i / k^2$  – показатель преломления препятствия. Отметим, что, вычислив  $\tilde{b}_n$ , можно определить дифференциальное сечение рассеяния на единицу длины цилиндра

$$d\sigma_{sc} = |f|^2 d\varphi = \frac{1}{2\pi k \sin \zeta} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\varphi} \right|^2 d\varphi = \frac{1}{2\pi k \sin \zeta} |b_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\varphi|^2 d\varphi. \quad (13)$$

Удобно заменить угловую переменную  $\varphi$  на  $\theta = \pi - \varphi$ ;  $\theta$  – это обычный угол рассеяния:  $\theta = 0^0$  – рассеяние вперед,  $\theta = \pi$  – рассеяние назад. Итак,

1) рассеянная волна при  $kr \sin \zeta \gg 1$

$$u_s \sim \frac{e^{ikr \sin \zeta}}{\sqrt{r}} \cdot \frac{e^{-i\frac{\pi}{4} - ikr \cos \zeta}}{\sqrt{2\pi k \sin \zeta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n e^{in\varphi}; \quad (14)$$

2) дифференциальное сечение рассеяния

единицей длины прямого кругового цилиндра радиуса  $R$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{1}{2\pi k \sin \zeta} |b_0 + 2 \sum_1^{\infty} b_n \cos n\theta|^2. \quad (15)$$

Рассмотрим эту же задачу в борновском приближении [7]. Потенциальная энергия – оптический ядерный потенциал  $U$  – рассматривается как возмущение. Волновую функцию ищем в виде  $\psi = \psi_0 + \psi_1$ , где  $\psi_0 = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  – соответствует падающей частице. В цилиндрической системе координат  $(\rho, \varphi, z)$  расходящаяся волна на больших расстояниях от оси имеет асимптотическое выражение функции Ганкеля первого рода, и поправка  $\psi_1$  к волновой функции  $\psi_0$  на больших расстояниях от оси цилиндра  $R_0$  будет

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U(\rho, z) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \cdot i\pi H_0^{(1)}(k\rho) \rho d\rho d\varphi = \\ &= f_B(\varphi) \frac{e^{ikR_0}}{\sqrt{R_0}}, \end{aligned} \quad (16)$$

отсюда амплитуда рассеяния

$$\begin{aligned} f_B(\varphi) &= -\frac{m}{\hbar^2} \cdot \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k}} \int \frac{\hbar^2}{2m} (4\pi N b) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \rho d\rho d\varphi = \\ &= -\sqrt{\frac{2\pi}{k}} (N b_c) e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{2J_1(qR)}{qR} \pi R^2, \quad [\text{см}^{1/2}] \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$  – вектор рассеяния,  $q = 2k \sin \varphi / 2$ . Тогда получим формулу для вычисления дифференциального сечения для вычисления упругого рассеяния ОХН

$$\frac{d\sigma_B}{d\varphi} = \frac{2\pi}{k} (N b_c)^2 \left( \frac{2J_1(2k \sin(\varphi/2)R)}{2kR \sin \varphi / 2} \right)^2 \cdot (\pi R^2)^2 [\text{см}], \quad (18)$$

в борновском приближении.

### Обсуждение результатов численного моделирования

На рис. 1–3 приведены диаграммы рассеяния, вычисленные по формулам, полученным на основе решения уравнения Шрёдингера и формулам борновского приближения. Для вычисления коэффициентов  $b_n$  в (16) использовался алгоритм, изложенный в работах [10–11]. Время вычисления можно существенно сократить, если воспользоваться методами волновой теории катастроф [12–19]. На всех графиках по вертикальной оси отложены дифференциальные сечения рассеяния на единицу длины рассеивателя в логарифмическом масштабе (одно деление – 10 единиц), по горизонтальной оси – угол рассеяния (одно деление – 20°). Сплошная линия представляет результат вычисления дифференциального сечения рассеяния  $\frac{d\sigma}{d\theta}$  по строгой формуле (16). Штриховая линия – по формуле борновского

приближения (20). Рассеиватель – это бесконечный круговой цилиндр радиуса  $R = 25$  нм. Оптический ядерный потенциал для него  $U = 1,81$  эВ. Значение ядерного потенциала соответствует граничной скорости ОХН  $v_{sp} = 5,90$  м/с и граничной волне де Бройля  $\lambda_{sp} = 66,9$  нм. На оптическом языке задачу можно сформулировать следующим образом: нейтронная плоская волна с длиной волны  $\lambda_v$  падает на цилиндр с показателем преломления  $n$ . Направление распространения нейтронной волны с осью цилиндра составляет угол  $\zeta = 90^\circ$ . Значения скорости ОХН  $v_n$  и показателя преломления материала цилиндра  $n$  представлены в подписях к рисункам.

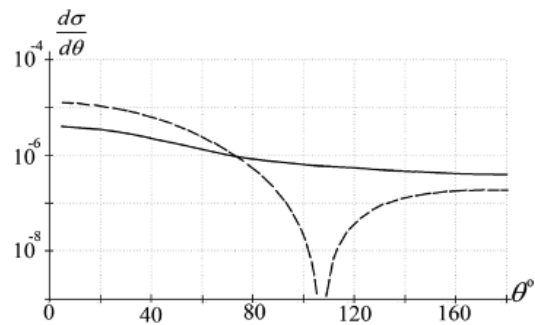


Рис. 1. Дифференциальные сечения рассеяния, вычисленные при скорости ОХН  $v_n = 6$  м/с. Значение показателя преломления  $n = 0,1771$

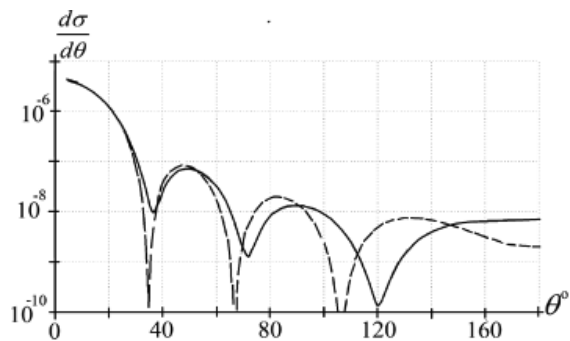


Рис. 2. Дифференциальные сечения рассеяния, вычисленные при скорости ОХН  $v_n = 16$  м/с. Значение показателя преломления  $n = 0,9294$

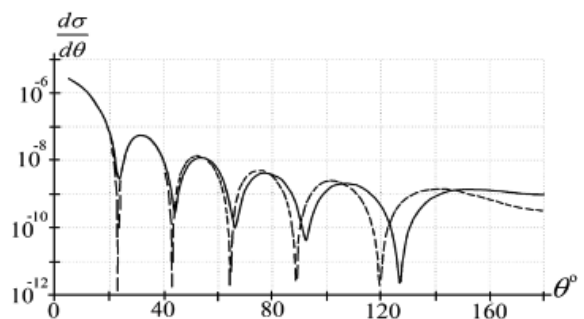


Рис. 3. Дифференциальные сечения рассеяния, вычисленные для скорости ОХН  $v_n = 24$  м/с. Значение показателя преломления  $n = 0,9693$

В заключение отметим, что методика определения параметров неоднородностей (в частности, параметров углеродных нанотрубок) в наноструктурированных материалах основана на анализе экспериментальных данных по рассеянию очень холодных нейтронов при прохождении нейтронов через образец и математическом моделировании этого процесса. Сечения упругого рассеяния, необходимые для моделирования, вычисляются в первом борновском приближении. Для области значений энергии нейтронов (интервал энергий ОХН), в которых использование борновского приближения вызывает сомнения, сечения упругого рассеяния вычисляются на основе точного решения уравнения Шрёдингера методом разделения переменных для рассеивателей «правильных» форм (шары, цилиндры и др.).

### Литература

1. Dubnikova I., Kuvardina E., Krasheninikov V., Lomakir S., Tchmutin I. and Kuznetsov S. // J. Appl. Polimer. Science, Vol. 117, 259 (2010)
2. Антонов А.В., Исаков А.И., Мешков И.В., Перекрестенко А.Д., Шелагин А.В. Рассеяние очень холодных нейтронов на неоднородностях различных форм // Краткие сообщения по физике ФИАН. – 1985. – № 10. – 48.
3. Антонов А.В., Исаков А.И., Кузнецов С.П., Мешков И.В., Перекрестенко А.Д., Шелагин А.В. Физика твердого тела, 26, 1585 (1984)
4. Антонов А.В., Герасимов В.И., Исаков А.И., Кузнецов С.П., Мешков И.В., Тарасов С.Т. Взаимодействие очень холодных нейтронов с блок-сополимером типа полистирол-полибутадиен-полистирол // Письма в ЖЭТФ. – 1985. – Т. 41. – № 5. – 210.
5. Ковалева Н.Ю., Бревнов П.Н., Гринев В.Г., Кузнецов С.П., Позднякова И.В., Чвалун С.Н., Синевиц Е.А., Новокщенова Л.А. Синтез нанокомпозитов на основе полиэтилена и слоистых силикатов методом интеркаляционной полимеризации // Высокомолекулярные соединения А. – 2004. – Т. 46. – № 6. – С. 1–7.
6. Kuznetsov S.P., Dubnikova I.L., Litvin V.S., Meshkov I.V., Shelagin A.V. and Udovenko A.I. Acta Physica Polonica A, 117, 727 (2010)
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. – М.: Наука, 1974. – 593 с.
8. Хюлст ван де Г. Рассеяние света малыми частицами. – М.: ИЛ, 1961. – 536 с.
9. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – М.: Мир, 1986. – 664 с.
10. Ипатов Е.Б., Гридин Д.В. Вычисление интегралов от быстро осциллирующих функций: в кн.: Проблемы распространения и дифракции электромагнитных волн. – М.: МФТИ, 1995. – С. 47–53.
11. Ипатов Е.Б., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численные методы расчета специальных функций волновых катастроф // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1985. – Т. 25. – № 2. – С. 224–236.
12. Крюковский А.С. Локальные равномерные асимптотики волновых полей в окрестности основных и краевых каспаидных каустик // Радиотехника и электроника. – 1996. – Т. 41. – № 1. – С. 59–65.
13. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Классификация и равномерное асимптотическое описание пространственно-временных трехмерных краевых фокусировок волновых полей // Радиотехника и электроника. – 2005. – Т. 50. – № 10. – С. 1221–1230.
14. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Классификация унимодальных и бимодальных угловых катастроф // Функциональный анализ и его приложения. – 1992. – Т. 26. – Вып. 3. – С. 77–79.
15. Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Palkin E.A., Rastyagaev D.S. Wave catastrophes: types of focusing in diffraction and propagation of electromagnetic waves // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2006. – Т. 51. – № 10. – P. 1087.
16. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Построение равномерной геометрической теории дифракции методами краевых и угловых катастроф // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т. 43. – № 9. – С. 1044–1060.
17. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые катастрофы и асимптотики // ДАН СССР. – 1986. – Т. 291. – № 4. – С. 823–827.
18. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики и угловые катастрофы // Доклады РАН. – 1995. – Т. 341. – № 4. – С. 456–459.
19. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф: монография. – М.: РосНОУ, 2013. – 368 с.