

## КАУСТИЧЕСКАЯ И ЛУЧЕВАЯ СТРУКТУРЫ ОТРАЖЕННЫХ РАДИОВОЛН В ЛИНЕЙНОМ ПЛАЗМЕННОМ СЛОЕ<sup>2</sup>

*Исследованы лучевые и каустические структуры, образующиеся при распространении электромагнитных волн в ионосферной плазме. Предполагается, что эффективная диэлектрическая проницаемость среды распространения линейно уменьшается с высотой. Основное внимание уделено каустической структуре вторичных (отраженных) лучей, возникающих при многоскачковом распространении, а также ионограммам наклонного зондирования. Показано, что каустическая структура отраженной волны соответствует гиперболической омбилике (катастрофа  $D_4^+$ ), а учет отражения приводит к уширению ионограмм.*

**Ключевые слова:** лучи, каустики, катастрофы, плазменный слой, ионограммы, якобиан расходимости, распространение, отражение, бихарактеристическая система уравнений, групповое время, фаза, частота.

A.S. Kryukovsky

## CAUSTIC AND RAY STRUCTURES OF REFLECTED RADIO WAVES IN A LINEAR PLASMA LAYER

*Ray and caustic structures formed at propagation of electromagnetic waves in ionospheric plasma are investigated. It is supposed, that effective permittivity of propagation medium linearly decreases with height. The main attention is given caustic structures of the secondary (reflected) rays arising at multi-reflected propagation, and also ionograms of inclined sounding. It is shown, that caustic structures of the reflected wave corresponds to a hyperbolic umbilicus (catastrophe  $D_4^+$ ), and the account of reflection results to enlarging of ionogram width.*

**Keywords:** rays, caustics, catastrophes, plasma lay, ionograms, Jacobin of divergence, propagation, reflection, bi-characteristic systems of equations, group time, phase, frequency.

### Постановка задачи

В работе предполагается, что точечный источник излучения помещен в начало координат (0, 0), а эффективная диэлектрическая проницаемость среды распространения меняется по закону:

$$\varepsilon(z) = 1 - \frac{\gamma}{\omega^2} z, \quad (1)$$

где  $z$  – вертикальная координата,  $\omega$  – круговая частота излучения, а параметр  $\gamma$  равен:

$$\gamma = \frac{\omega_c^2}{z_m}. \quad (2)$$

В формуле (2)  $\omega_c$  – это некоторая характерная частота. В настоящей работе предполагалось, что  $\omega_c = \omega = 13,5 \cdot 10^6 \text{ } 2\pi \text{ об./с.}$  При этом

$z_m$  – это высота точки отражения вертикального луча. В настоящей работе расчеты выполнялись при  $z_m = 300 \text{ км.}$

Хорошо известно [1] (см. также [2–4]), что бихарактеристическую систему уравнений Гамильтона можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{r}} \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega},$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left( 2c^2 \vec{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{k}} \right) \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega}, \quad (3)$$

где  $\vec{k} = (k_x, k_z)$  – волновой вектор,  $\vec{r} = (x, z)$  – координаты точки наблюдения,  $c = 2,997925 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$  – скорость света, а  $t$  – параметр вдоль лучевой траектории, имеющий смысл группового времени. Эта система является следствием дисперсионного соотношения:

$$k_x^2 + k_z^2 = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (4)$$

Учитывая, что диэлектрическая проницаемость имеет вид (1), бихарактеристическая система (3) может быть переписана как:

<sup>1</sup> Доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета информационных систем и компьютерных технологий НОУ ВПО «Российский новый университет».

<sup>2</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 09-07-00189-а, 10-02-01103-а).

$$\frac{dk_x}{dt} = 0, \quad \frac{dk_z}{dt} = -\frac{\gamma}{2\omega},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2}{\omega} k_x, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{c^2}{\omega} k_z. \quad (5)$$

Решение системы (5) очевидно:

$$k_x = k_x^0 = \text{const}, \quad x = \frac{c^2}{\omega} k_x t + x_0, \quad (6)$$

$$k_z = -\frac{\gamma}{2\omega} t + k_z^0, \quad z = \frac{c^2}{\omega} \left( -\frac{\gamma}{4\omega} t^2 + k_z^0 t \right) + z_0.$$

### Лучи и каустика первичной волны

Для однозначного определения траекторий лучей в плазме необходимо задать начальные условия (при  $t = 0$ ). Как уже было отмечено выше, источник излучения расположен в начале координат, то есть  $x_0 = 0$  и  $z_0 = 0$ . Поскольку источник излучения точечный, начальный волновой вектор параметрически зависит от угла  $\alpha$  выхода луча:

$$k_x^0 = k_x(0) = \frac{\omega}{c} \cos \alpha, \quad k_z^0 = k_z(0) = \frac{\omega}{c} \sin \alpha. \quad (7)$$

Тогда бихарактеристическая система (6) принимает вид:

$$k_x = \frac{\omega}{c} \cos \alpha, \quad x = c t \cos \alpha, \quad (8)$$

$$k_z = -\frac{\gamma}{2\omega} t + \frac{\omega}{c} \sin \alpha, \quad z = \frac{c^2}{\omega} \left( -\frac{\gamma}{4\omega} t^2 + t \frac{\omega}{c} \sin \alpha \right).$$

В координатах  $(x, z)$  уравнение луча – это парабола:

$$z = -\frac{\gamma}{4\omega^2} \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha. \quad (9)$$

На рис. 1 графически показано рассмотренное выше семейство лучей. Этот результат хорошо известен. Положение каустики (огibaющей семейства лучей) на рисунке не вызывает сомнений.

Для вычисления положения каустики необходимо рассмотреть якобиан, описывающий расходимость лучевой трубки:

$$J_p = \begin{vmatrix} x'_t & z'_t \\ x'_\alpha & z'_\alpha \end{vmatrix} = \frac{c^2}{\omega} \begin{vmatrix} k_x & k_z \\ x'_\alpha & z'_\alpha \end{vmatrix} = \frac{c^2}{\omega} J. \quad (10)$$

Из формул (8) следует, что

$$x'_\alpha = -c t \sin \alpha, \quad z'_\alpha = c t \cos \alpha. \quad (11)$$

Поэтому в данной задаче якобиан  $J$  равен:

$$J = c t \left( \frac{\omega}{c} - \frac{\gamma}{2\omega} t \sin \alpha \right). \quad (12)$$

На рис. 2 графически показано семейство якобианов, вычисленных вдоль лучей. Верхние кривые соответствуют малым значениям угла выхода  $\alpha$ . На каустике якобиан обращается в нуль. Приравняв к нулю выражение (12), находим два значения:  $t = 0$  (источник излучения) и

$$t_k = \frac{2\omega^2}{c \gamma \sin \alpha} \quad (13)$$

– групповое время прихода луча на каустику.

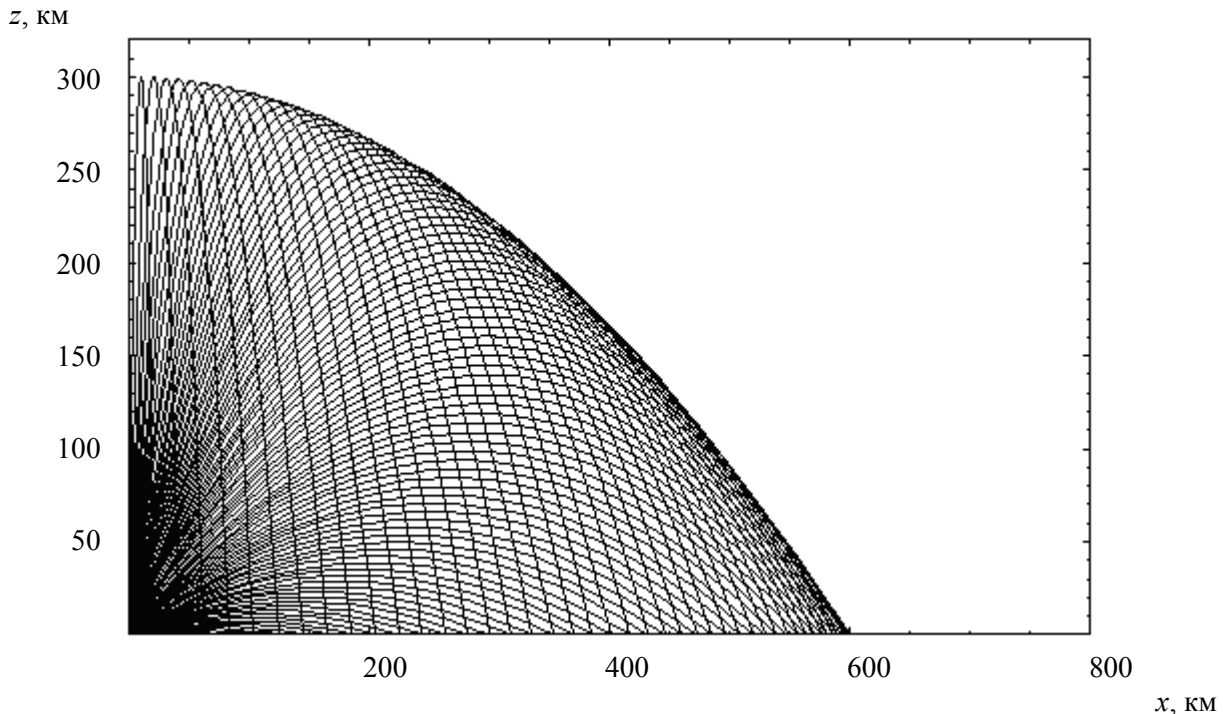


Рис. 1. Лучи точечного источника в линейном слое. Число лучей 89

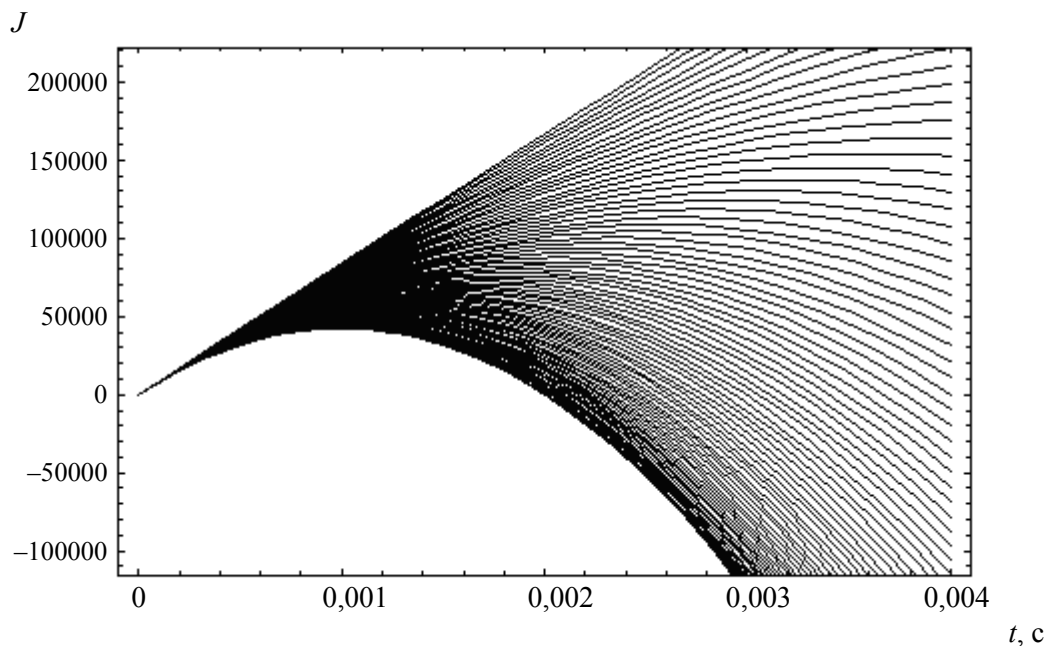


Рис. 2. Якобианы вдоль лучей в линейном слое

Подставляя (13) в (8), находим параметрическое уравнение каустики:

$$x_k = \frac{2\omega^2}{\gamma} \operatorname{ctg} \alpha, \quad z_k = -\frac{\omega^2 \cos 2\alpha}{\gamma \sin^2 \alpha} \quad (14)$$

или, исключая параметр  $\alpha$ , явное уравнение:

$$z_k = \frac{\omega^2}{\gamma} \left( 1 - \left( \frac{\gamma x_k}{2\omega^2} \right)^2 \right). \quad (15)$$

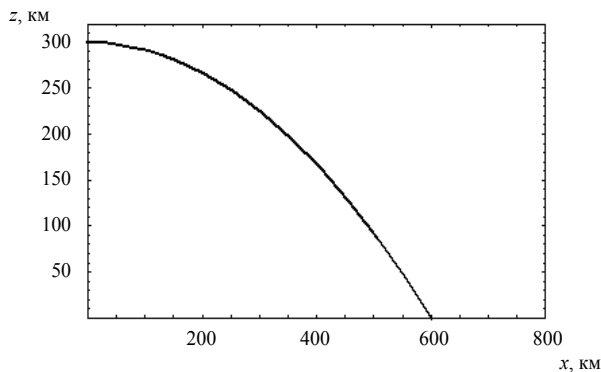


Рис. 3. Каустика первичных лучей

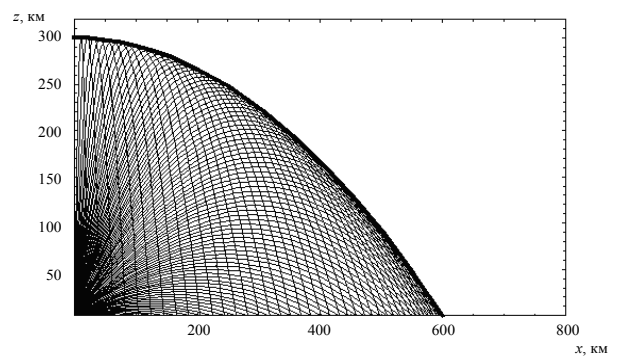


Рис. 4. Каустика и лучевое семейство

На рис. 3 представлена каустика в линейном слое, а на рис. 4 показано одновременно лучевое семейство и каустика (толстой линией). Из (8) видно, что, выйдя из источника, луч приходит обратно на линию  $z = 0$  за время:

$$t_r = \frac{4\omega^2}{c\gamma} \sin \alpha. \quad (16)$$

Этому времени соответствуют:

$$k_{z,r} = -\frac{\omega}{c} \sin \alpha, \quad x_r = \frac{2\omega^2}{\gamma} \sin 2\alpha. \quad (17)$$

На рис. 5 показана зависимость группового времени от горизонтальной координаты  $x_r$ .

Групповое время тем больше, чем больше значение угла выхода луча  $\alpha$ . Поворот линии соответствует каустике. Интересно отметить, что вертикальный луч приходит в точку отражения в линейном плазменном слое за время вдвое большее ( $\sim 2$  мс), чем в свободном пространстве ( $\sim 1$  мс).

На рис. 6 показана ионограмма наклонного зондирования в точке ( $x_r = 300$  км,  $z = 0$ ), то есть зависимость группового времени прихода луча от частоты  $f_r$ , вычисленная по формулам:

$$t_r = \frac{2x_r}{c} \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha}, \quad f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma x_r}{2 \sin 2\alpha}}. \quad (18)$$

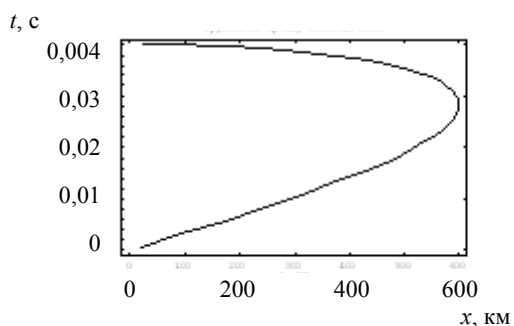


Рис. 5. Зависимость группового времени от  $x$

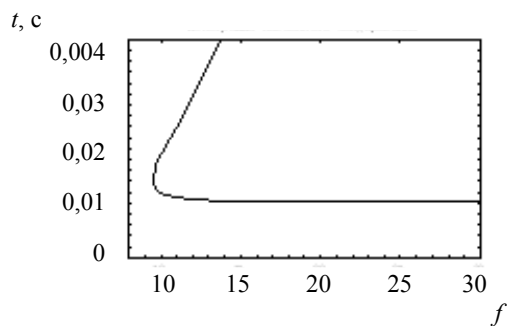


Рис. 6. Ионограмма наклонного зондирования

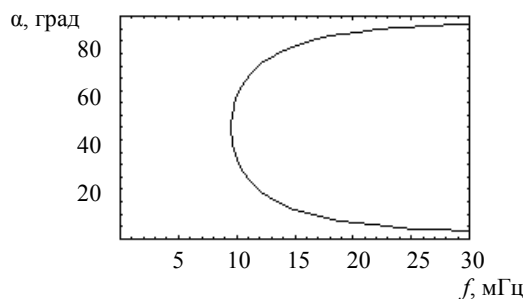


Рис. 7. Зависимость угла прихода луча от частоты

Поворот графика также соответствует кау-  
стике.

На рис. 7 представлена зависимость угла  
прихода луча в точку с координатами ( $x_r=300$  км,  
 $z=0$ ) от частоты.

#### Лучи и каустики отраженной волны пер- вого порядка

Теперь рассмотрим лучевую структуру волн,  
зеркально отраженных от линии  $z=0$ . Значение  
компоненты волнового вектора  $k_x$  не меняется.  
Условием отражения луча является смена знака  
 $z$ -ой компоненты волнового вектора на поверх-

ности отражения. Подставляя в качестве началь-  
ных данных формулы (17) в (6) и меняя знак у  
 $z$ -ой компоненты волнового вектора, получаем  
бихарактеристическую систему для отраженных  
волн первого порядка:

$$\begin{aligned} k_{x,1} &= \frac{\omega}{c} \cos \alpha, & x_1 &= c t_1 \cos \alpha + \frac{2\omega^2}{\gamma} \sin 2\alpha, \\ k_{z,1} &= -\frac{\gamma}{2\omega} t_1 + \frac{\omega}{c} \sin \alpha, \\ z_1 &= \frac{c^2}{\omega} \left( -\frac{\gamma}{4\omega} t_1^2 + t_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha \right). \end{aligned} \quad (19)$$

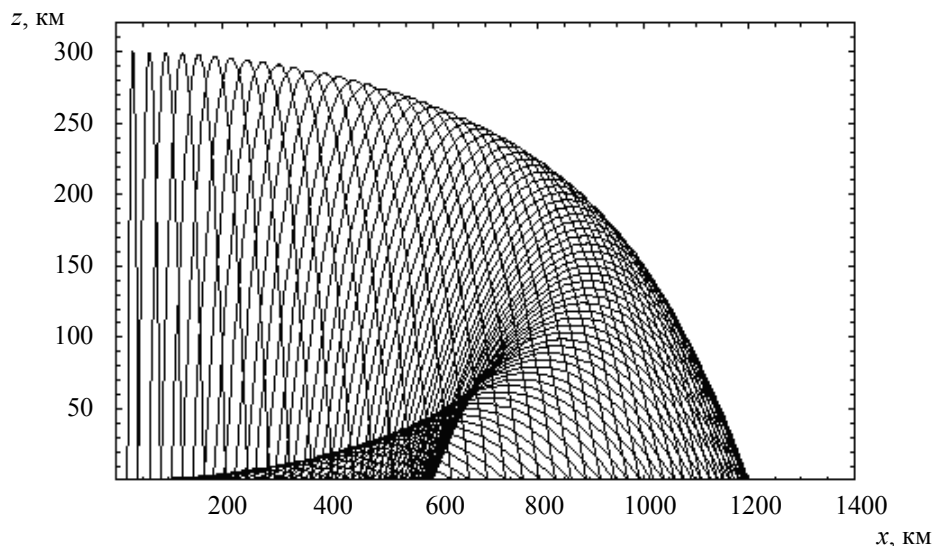


Рис. 8. Структура отраженных лучей

Здесь индексом «1» отмечены все величины, относящиеся к семейству отраженных лучей, в том числе и групповое время, отсчитанное от точки отражения. Поэтому общее групповое время – это сумма  $t_r + t_1$ .

В координатах  $(x, z)$  уравнение луча по-прежнему парабола:

$$z_1 = -\frac{\gamma}{4\omega^2} \frac{x_1^2}{\cos^2 \alpha} + 3x_1 \operatorname{tg} \alpha - 8 \frac{\omega^2}{\gamma} \sin^2 \alpha, \quad (20)$$

однако лучевая структура иная (рис. 8). Очевидно, что кроме охватывающей каустики (катастрофа  $A_2$ ) возникает еще и каустическое острие (катастрофа  $A_3$ ), образующие единую каустическую структуру (катастрофа  $D_4^+$ ). Необходимо отметить, что образование двумерной катастрофы  $D_4^+$  в двумерных случаях было отмечено ранее

в работе [5], посвященной распространению излучения в неоднородном волноводе.

Для вычисления положения каустики, как и в случае первичной волны, необходимо рассмотреть якобиан  $J_1$  описывающий расходимость лучевой трубки отраженных лучей. Он определяется формулой (10), однако теперь меняется выражение для производной  $x'_{1,\alpha}$ :

$$x'_{1,\alpha} = -c t_1 \sin \alpha + \frac{4\omega^2}{\gamma} \cos 2\alpha, \quad (21)$$

$$z'_{1,\alpha} = c t_1 \cos \alpha,$$

а компоненты волновых векторов и  $z'_{1,\alpha}$  остаются неизменными. Тогда якобиан  $J_1$  равен:

$$J_1 = c t_1 \left( \frac{\omega}{c} - \frac{\gamma}{2\omega} t_1 \sin \alpha \right) + 2\omega \cos 2\alpha \left( t_1 - \frac{2\omega^2}{c\gamma} \sin \alpha \right). \quad (22)$$

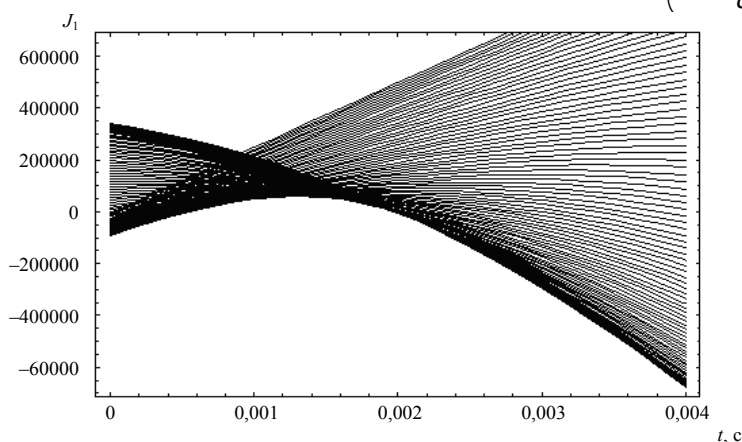


Рис. 9. Якобианы вдоль отраженных лучей

На рис. 9 представлено семейство якобианов, вычисленных вдоль отраженных лучей. Верхние кривые в правом верхнем углу соответствуют малым значениям угла выхода  $\alpha$ . Как и в случае первичных лучей, на каустике отраженных лучей якобиан обращается в нуль. Приравняв к нулю выражение (22), находим два значения группового времени:

$$t_{1,k(\pm)} = \frac{\omega^2 (1 + 2 \cos 2\alpha \pm \sqrt{5 + 4 \cos 4\alpha})}{c \gamma \sin \alpha}. \quad (23)$$

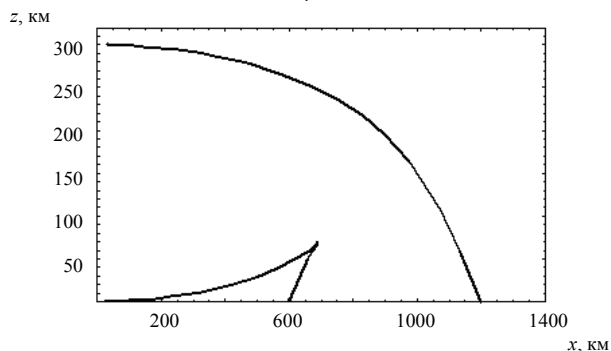


Рис. 10. Каустика отраженных лучей

Подставляя (23) в (19), находим параметрическое уравнение каустики:

$$x_{1,k(\pm)} = \pm \frac{\omega^2 (\sqrt{5 + 4 \cos 4\alpha} \pm 3)}{\gamma} \operatorname{ctg} \alpha, \quad (24)$$

$$z_{1,k(\pm)} = \pm \frac{\omega^2 (1 + 8 \cos 2\alpha \pm 3\sqrt{5 + 4 \cos 4\alpha}) \cos 2\alpha}{\gamma \sin^2 \alpha}.$$

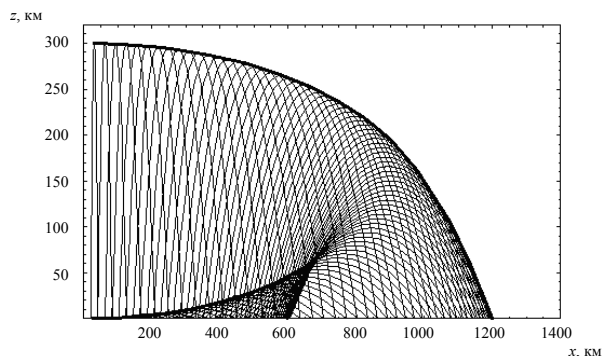


Рис. 11. Каустики и отраженные лучи

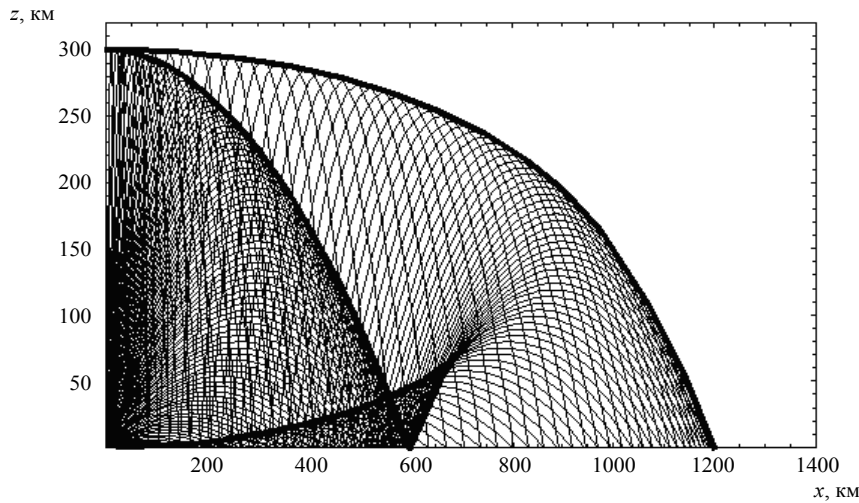


Рис. 12. Первичные и отраженные лучи и каустики

На рис. 10 показана каустика отраженных лучей. каустическое острие соответствует нижнему знаку в формулах (23), (24) (знак «-»), а охватывающая каустика – верхнему знаку (знак «+»). Необходимо обратить внимание, что верхняя ветвь каустического острия уходит в источник излучения. На рис. 11 представлено одновременно семейство отраженных лучей и каустика (толстой линией), а на рис. 12 каустики и лучи – как первичных, так и отраженных волн.

Видно, что нижняя ветвь каустического острия является как бы отраженной каусти-

кой по отношению к каустике первичной волны. Упоминания об отраженных каустиках можно найти в работах [6], [7]. Более подробно каустики отраженных лучей были рассмотрены в [2].

Отраженный луч приходит обратно на линию  $z = 0$  за локальное время  $t_{1,r} = t_r$  (см. формулу (16)). Поэтому суммарное групповое время равно  $2t_r$ . При этом горизонтальная координата также удваивается:

$$x_{1,r} = \frac{4\omega^2}{\gamma} \sin 2\alpha. \quad (25)$$

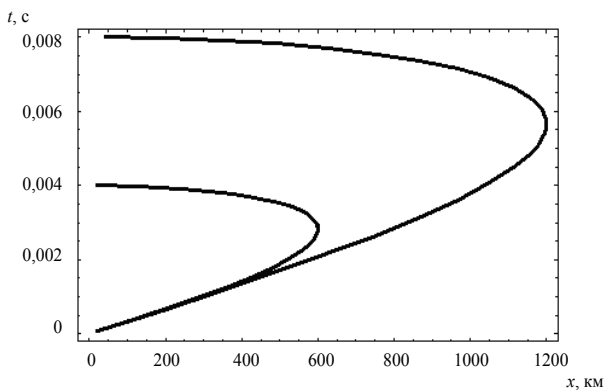


Рис. 13. Зависимость группового времени от координаты  $x$

На рис. 13 показана зависимость группового времени прихода первичного и вторичного лучей от координаты  $x$ . Большая кривая соответствует отраженным лучам. Интересно отметить, что наличие нижней ветви каустики никак не влияет на форму этой кривой, которая подобна зависимости группового времени первичных лучей (малая кривая). На рис. 14 представлена ионограмма наклонного зондирования в точке ( $x_r = 300$  км,  $z = 0$ ), то есть зависимость группо-

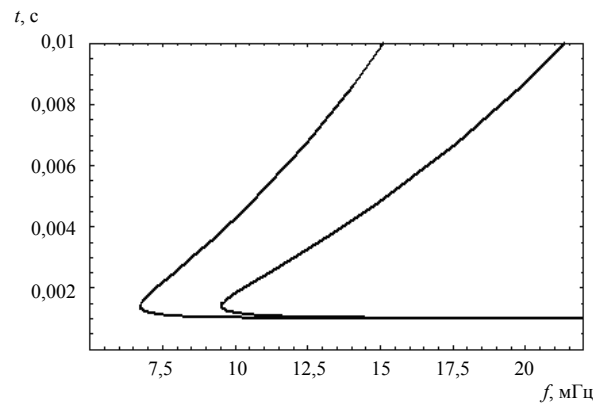


Рис. 14. Ионограммы наклонного зондирования

вого времени прихода луча от частоты, вычисленная по формулам (18) для первичных лучей и по формулам:

$$t_{1,r,s} = \frac{x_r}{c \cos \alpha}, \quad f_{1,r} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma x_r}{4 \sin 2\alpha}}. \quad (26)$$

для отраженных лучей. Левая кривая соответствует отраженным лучам, правая – первичным. Верхняя часть графика соответствует большому углу  $\alpha$  выхода луча. Точки поворота графиков указывают на положение внешних каустик.

### Лучи и каустики отраженных волн второго и более высоких порядков

Обобщая результаты, полученные в предыдущих разделах, нетрудно убедиться, что бихарактеристическая система для отраженных волн  $m$ -ого порядка имеет вид:

$$\begin{aligned} k_{x,m} &= \frac{\omega}{c} \cos \alpha, \\ x_m &= c t_m \cos \alpha + \frac{2m\omega^2}{\gamma} \sin 2\alpha, \\ k_{z,m} &= -\frac{\gamma}{2\omega} t_m + \frac{\omega}{c} \sin \alpha, \\ z_m &= \frac{c^2}{\omega} \left( -\frac{\gamma}{4\omega} t_m^2 + t_m \frac{\omega}{c} \sin \alpha \right), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $m = 0$  соответствует первичной волне,  $m = 1$  – отраженной волне, рассмотренной в предыдущем разделе, и т.д. Форма луча при всех отражениях – это парабола:

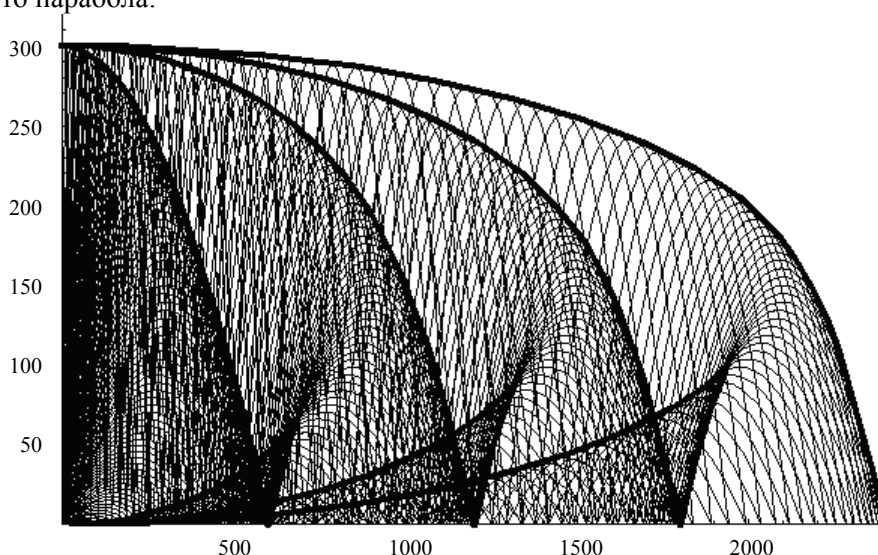


Рис. 15. Лучевые и каустические структуры,  $m = 3$

Приравнявая к нулю выражение (30), находим два значения группового времени:

$$t_{m,k(\pm)} = \frac{\omega^2 \left( 1 + 2m \cos 2\alpha \pm \sqrt{1 + 2m + 2m^2 + 2m(1+m) \cos 4\alpha} \right)}{c \gamma \sin \alpha}, \quad (31)$$

а подставляя (31) в (27), получаем параметрическое уравнение каустики:

$$x_{m,k(\pm)} = \frac{\omega^2 \left( 1 + 2m \pm \sqrt{1 + 2m + 2m^2 + 2m(1+m) \cos 4\alpha} \right)}{\gamma} \operatorname{ctg} \alpha, \quad (32)$$

$$z_m = -\frac{\gamma}{4\omega^2} \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} + (1 + 2m)x \operatorname{tg} \alpha - \frac{4m(m+1)\omega^2}{\gamma} \sin^2 \alpha. \quad (28)$$

Для вычисления положения каустики отраженных лучей  $m$ -ого порядка необходимо найти нули якобиана  $J_m$ . Так как производные координат по параметру  $\alpha$  имеют вид:

$$\begin{aligned} x'_{m,\alpha} &= -c t_m \sin \alpha + \frac{4m\omega^2}{\gamma} \cos 2\alpha, \\ z'_{m,\alpha} &= c t_m \cos \alpha, \end{aligned} \quad (29)$$

то якобиан  $J_m$  равен:

$$\begin{aligned} J_m &= c t_m \left( \frac{\omega}{c} - \frac{\gamma}{2\omega} t_m \sin \alpha \right) + \\ &+ 2\omega \cos 2\alpha \left( t_m - \frac{2m\omega^2}{c\gamma} \sin \alpha \right). \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} z_{1,k(\pm)} &= \pm \frac{\omega^2 \cos 2\alpha}{\gamma \sin^2 \alpha} \times \\ &\times \left( 1 + 4m(1+m) \cos 2\alpha \pm \right. \\ &\left. \pm (1+2m) \sqrt{1 + 2m + 2m^2 + 2m(1+m) \cos 4\alpha} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

На рис. 15 показаны лучевые и каустические структуры первичной и трех отраженных волн. Видно, что вдоль отражающей линии стелется верхняя ветвь каустического острья, причем на определенных расстояниях, расположенных квазипериодически, волна как бы высветливается вверх. Фактически это лучевая интерпретация образования поверхностной волны.

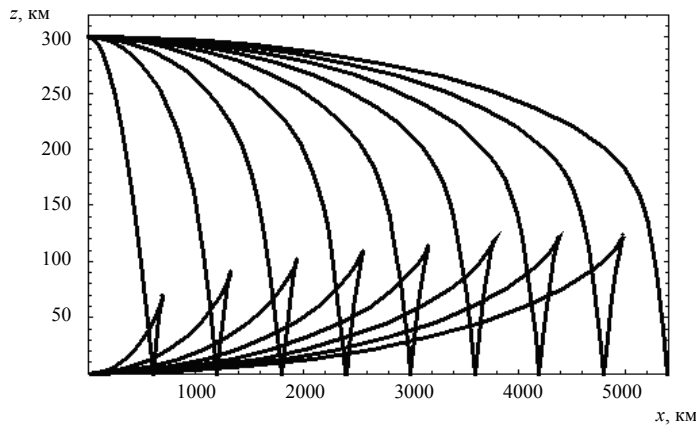


Рис. 16. Каустическая структура,  $m = 8$

На рис. 16 показана только каустическая структура при  $m = 8$ , а на рис. 17 и 18 (точками) положения центров каустического острия для разных порядков отражения (до  $m = 20$ ).

Видно, что при увеличении порядка отражения центры каустического острия удаляются вправо, а их вертикальная координата медленно, но возрастает.

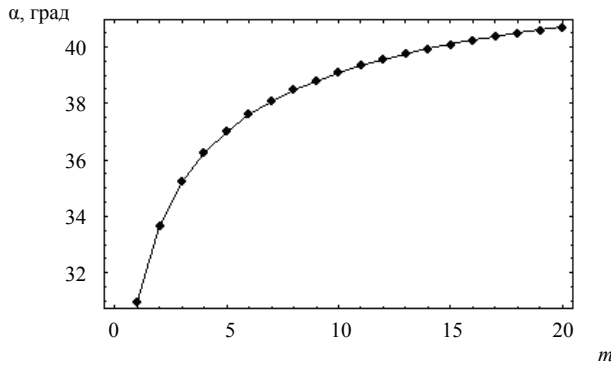


Рис. 17. Положения центров каустического острия. Зависимость угла выхода от порядка отражения

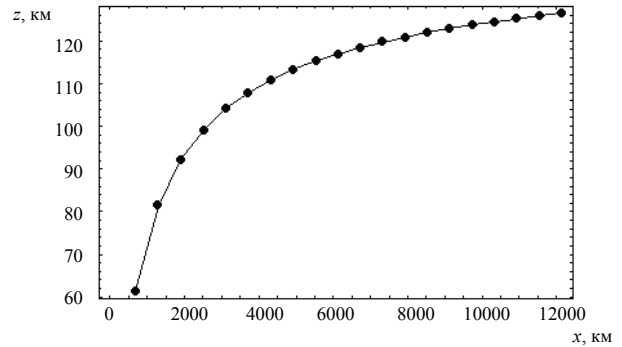


Рис. 18. Положения центров каустического острия. Координаты  $(x, z)$

Положения центров каустического острия определялись численно. Приравнивая к нулю производную якобиана по параметру выхода луча  $\alpha$  (дополнительное уравнение для определения положения центра каустического острия)

$$\frac{\partial J_m}{\partial \alpha} = 0, \quad (33)$$

находился угол  $\alpha_c$ . Зная угол  $\alpha_c$ , из формул (32)

нетрудно найти декартовы координаты каустического острия.

Отраженный луч  $m$ -ого порядка приходит обратно на линию  $z = 0$  за локальное время  $t_{m,r} = t_r$  (см. формулу (16)). Поэтому суммарное групповое время равно  $(m + 1) t_r$ . Тогда горизонтальная координата имеет вид:

$$x_{m,r} = \frac{2(m+1)\omega^2}{\gamma} \sin 2\alpha. \quad (34)$$

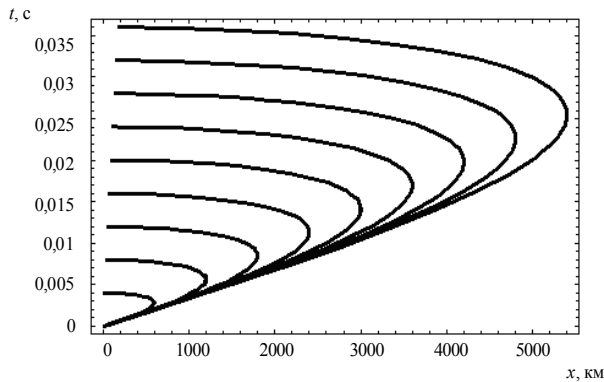


Рис. 19. Зависимость группового времени от координаты  $x$

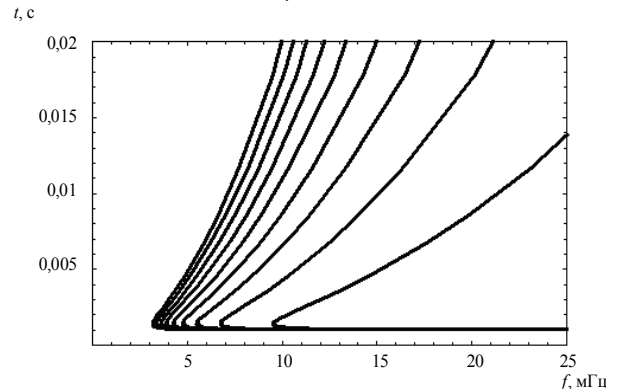


Рис. 20. Ионogramмы наклонного зондирования



На рис. 19 показана зависимость от координаты  $x$  группового времени прихода первичного и отраженных лучей до восьмого порядка включительно. Самая маленькая кривая соответствует первичным лучам. На рис. 20 представлена ионограмма наклонного зондирования в точке ( $x_r=300$  км,  $z=0$ ), то есть зависимость группового времени прихода луча от частоты, вычисленная по формулам (18) для первичных лучей и по формулам:

$$t_{m,r,s} = \frac{x_r}{c \cos \alpha}, \quad f_{m,r} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma x_r}{(m+1) \sin 2\alpha}} \quad (35)$$

для отраженных лучей. Внутренняя кривая соответствует первичным лучам. Точки поворота графиков указывают на положение внешних каустик.

Естественно возникает вопрос: как изменится вид ионограмм, если точка наблюдения несколько приподнята, то есть ее координаты будут

( $X, Z$ ). Находим локальное время прихода луча в эту точку:

$$t_{L,\pm} = \frac{2}{c\gamma} \left( \omega^2 \sin \alpha \pm \omega \sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha - Z\gamma} \right). \quad (36)$$

Таким образом, если подкоренное выражение неотрицательно, то в точку с высотой  $z = Z$  приходят два луча рассматриваемого лучевого семейства, а не один, как в предыдущем случае. Каждому групповому времени (36) соответствует своя координата  $x$ :

$$x_{L,-} = \frac{1}{\gamma} \left( (1+2m)\omega^2 \sin 2\alpha - 2\omega \cos \alpha \sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha - Z\gamma} \right), \quad (37)$$

$$x_{L,+} = \frac{2\cos \alpha}{\gamma} \left( m \omega^2 \sin 2\alpha + \omega^2 \sin \alpha + \omega \sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha - Z\gamma} \right). \quad (38)$$

На рис. 21 показана зависимость суммарного группового времени  $mt_r + t_{L,\pm}$  прихода первичного и отраженных лучей до восьмого порядка от координаты  $x$  (формулы (37), (38)).

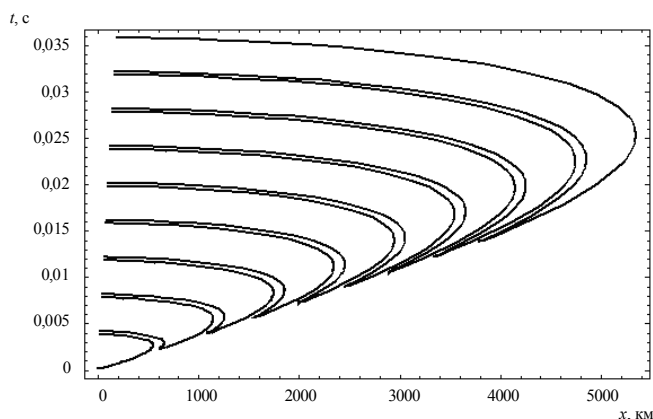


Рис. 21. Зависимость суммарного группового времени от  $x$ ,  $Z = 50$  км

Если сравнить рисунки 19 и 21, видны существенные качественные различия. На рис. 19 линии, соответствующие отраженным лучам, охватывают друг друга. На рис. 21 этого не происходит. Возникает точка возврата, и нижняя ветвь

отраженных лучей следующего порядка как бы стелется по верхней ветви лучей предыдущего порядка. При малых высотах их различить невозможно, поэтому происходит уширение линий.

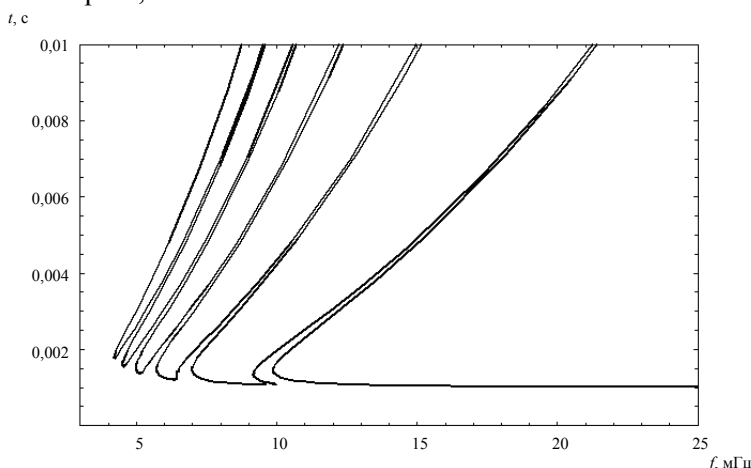


Рис. 22. Ионограммы отраженных лучей,  $Z = 20$  км,  $m = 5$

На рис. 22 представлены ионограммы наклонного зондирования. Для их вычисления из уравнений

$$x_{L,\pm} = X \quad (39)$$

определялись частоты (формулы явные, но громоздкие, поэтому здесь не приводятся), а суммарное групповое время определялось, как и выше, формулой:

$$t_{m,s} = \frac{X}{c \cos \alpha}. \quad (40)$$

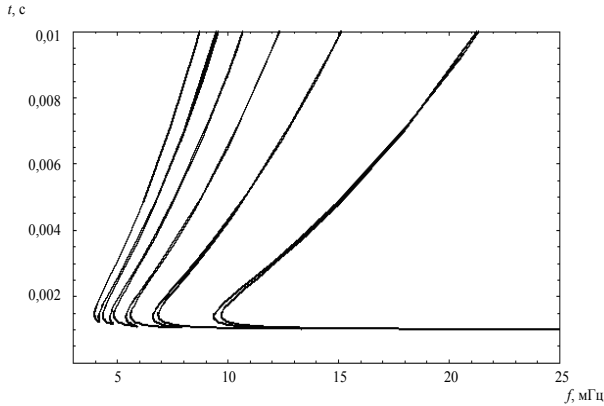


Рис. 23 Ионограммы отраженных лучей,  $Z = 10$  км,  $m = 5$

В реальных наблюдениях это приведет к уширению как верхней ветви ионограммы первичных лучей, так и максимума. Для сравнения на рис. 23 и 24 приведены ионограммы на высотах 10 км и 50 км соответственно.

В завершении работы приведем без подробного обсуждения графики фазы лучей вдоль линии  $Z = 0$ :

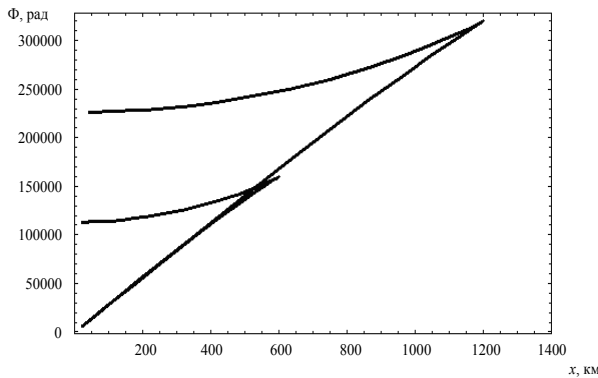


Рис. 25. Фазы лучей вдоль линии  $Z = 0$ ,  $m = 1$

### Заключение

Таким образом, в настоящей работе рассмотрены лучевые и каустические структуры, возникающие при распространении электромагнитных волн в плазменном слое с линейно уменьшающейся высотой эффективной диэлектрической проницаемостью среды распространения.

Сравним рис. 22 и 20. Следует обратить внимание на ионограмму отраженных лучей первого порядка. Если на рис. 20 ее нижняя ветвь сливалась с нижней вервью ионограммы первичных лучей, то теперь формируется точка каустического острия (точка возврата), после которой ветвь, делая разворот вокруг максимума ионограммы первичных лучей, начинает асимптотически стремиться к верхней ветви ионограммы первичных лучей.

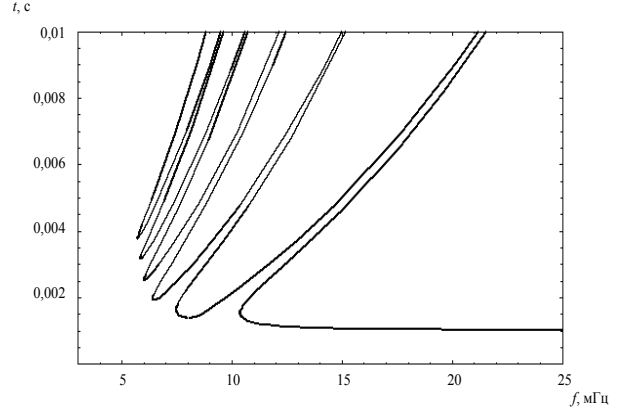


Рис. 24. Ионограммы отраженных лучей,  $Z = 50$  км,  $m = 5$

$$\begin{aligned} \Phi_{m,r} &= \frac{4(1+m)}{3c\gamma} \omega^3 (2 + \cos 2\alpha) \sin \alpha, \\ x_{m,r} &= \frac{2(m+1)\omega^2}{\gamma} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (41)$$

Видно, как два соседних порядка образуют сечение особенности «ласточкин хвост» (катастрофа  $A_4$ ).

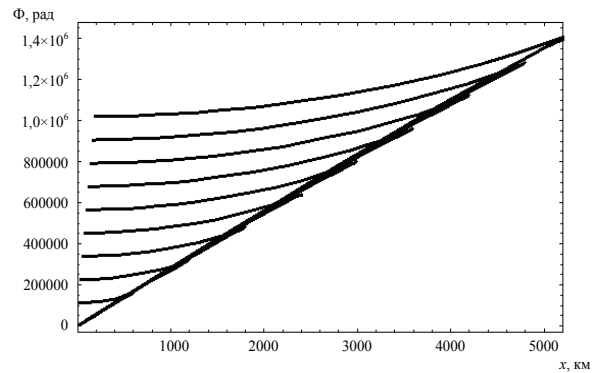


Рис. 26. Фазы лучей вдоль линии  $Z = 0$ ,  $m = 8$

Исследованы лучевые и каустические структуры отраженных лучей разных порядков, возникающих при многоскачковом распространении, ионограммы наклонного зондирования, структуры якобианов, фазовые и групповые зависимости. Показано, что каустическая структура отраженных волн соответствует гиперболическим омби-

ликам (катастрофа  $D_4^+$ ), а учет отражения приводит к уширению ионограмм.

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н., профессору Д.С. Лукину и д.ф.-м.н. А.П. Аютину за внимание к работе и полезные консультации.

### Литература

1. Лукин, Д.С., Спиридонов, Ю.Г. Применение метода характеристик для численного решения задач распространения радиоволн в неоднородной и нелинейной среде // Радиотехника и электроника. – 1969. – Т. 14. – № 9. – С. 1673–1677.
2. Крюковский, А.С., Лукин, Д.С., Растягаев, Д.В. Исследование особенностей распространения коротких радиоволн в неоднородной анизотропной ионосфере // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2009. – Т. 14. – № 8. – С. 17–26.
3. Крюковский, А.С., Лукин, Д.С., Растягаев, Д.В. Моделирование лучевой и каустической структуры электромагнитных полей по данным радиотомографии ионосферы в окрестности экваториальной аномалии // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2010. – Т. 15. – № 8. – С. 5–11.
4. Крюковский, А.С., Лукин, Д.С., Растягаев, Д.В. Исследование влияния локальных неоднородностей ионосферной плазмы на распространение коротких радиоволн // Вестник Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика». – М. : РосНОУ, 2010. – Вып. 3. – С. 17–25.
5. Крюковский, А.С., Лукин, Д.С., Палкин, Е.А. К вопросу о построении асимптотических решений в областях перекрытия прикаустических зон // Изв. ВУЗов МВ и ССО СССР (Радиофизика). – 1982. – Т. 25. – № 11. – С. 1375–1376.
6. Дубровский, К.М., Ипатов, Е.Б., Палкин, Е.А. Исследование влияния пространственной фокусировки коротких радиоволн на структуру амплитудных профилей сигналов ВНЗ // Распространение и дифракция волн : межвед. сб. – М. : МФТИ, 1988. – С. 123–128.
7. Дубровский, К.М., Ипатов, Е.Б., Палкин, Е.А., Школьников, В.А. Численное моделирование влияния крупномасштабных ионосферных неоднородностей на структуру сигналов ВНЗ // Распространение и дифракция волн : межвед. сб. – М. : МФТИ, 1989. – С. 24–29.