DOI: 10.18137/RNU.V9187.24.04.P.79 УДК 004.021

Л.М. Божко, А.И. Дергачев, С.А. Дергачев

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Аннотация. В статье рассматриваются этапы разработки алгоритма решения управленческой задачи с использованием симплекс-метода и результаты решения задачи по данному алгоритму. Задачи, решаемые с применением электронно-вычислительных машин, зачастую требуют наиболее полного учета нескольких целей. Необходимость разработки алгоритма задачи линейного программирования обоснована тем, что в ней, наряду с записью выполняемых действий, определяются логические связи для достижения поставленных целей. Предписанием для ЭВМ является программа, составленная на основе предложенной схемы алгоритма решения задачи. Преимуществом предложенного алгоритма является то, что он позволяет получать оптимальные решения как на этапе планирования, так и в ходе оперативного управления и впоследствии дает возможность оценить эффективность деятельности организаций с позиции системного подхода. Разработанный алгоритм может быть использован при постановке задач для их последующего решения на ЭВМ.

Ключевые слова: математическая модель, математическое моделирование, линейное программирование, симплекс-метод.

L.M. Bozhko, A.I. Dergachev, S.A. Dergachev

ALGORITHM FOR SOLVING LINEAR PROGRAMMING PROBLEM BASED ON SIMPLEX METHOD

Abstract. Often problems solved using computers require the most complete consideration of several goals. The need to develop an algorithm scheme for a linear programming problem is justified by the fact that in it, along with recording the actions performed, logical links are determined to achieve the set goals. The article discusses the stages of development of the algorithm for solving a management problem using the simplex method as well as the results of solving the problem using this algorithm. The instruction for a computer is the program based on the proposed algorithm for solving the problem. The advantage of the proposed algorithm for solving the linear programming problem is that it allows obtaining optimal solutions both at the planning stage and during operational management, and subsequently makes it possible to assess the effectiveness of organizations' activities from the standpoint of a system approach. The developed algorithm can be used when setting problems for their subsequent solution on a computer.

Keywords: mathematical model, mathematical modeling, linear programming, simplex method.

Введение

В данной статье в качестве образца разработки алгоритма решения задачи (подготовки к решению на ЭВМ) выбрана задача линейного программирования. Линейное программирование находит применение во многих сферах, в том числе в подготовке управленческих решений при управлении организацией. Решение задачи линейного программирования позволяет найти оптимальный (наилучший) вариант использования имеющихся в распоряжении хозяйствующего субъекта ограниченных ресурсов.

Задачи линейного программирования могут быть решены разными методами: с помощью апекс-метода – новой версии итерационного метода [1], геометрического метода [2], нейросетевого метода [3], смешанного целочисленного линейного программиро-

Божко Леся Михайловна
доктор экономических наук, доцент, профессор кафедры информационных и вычислительных систем, Петербургский университет путей сообщения Александра I, Санкт-Петербург. Сфера научных интересов: компьютерное и имитационное моделирование, алгоритмы и методы имитационного моделирования в экономических системах, цифровые технологии в менеджменте. Автор более 160 опубликованных научных работ. ORCID: 0000-0002-3329-7977, SPIN-код: 4076-2375, AuthorID: 648758.
Электронный адрес: lemib@rambler.ru

Дергачев Алексей Иванович
кандидат военных наук, доцент, доцент кафедры информационных и вычислительных систем, Петербургский университет путей сообщения Александра I, Санкт-Петербург. Сфера научных интересов: компьютерное и имитационное моделирование, алгоритмы и методы имитационного моделирования при строительстве и восстановлении транспортных объектов. Автор более 100 опубликованных научных работ. ORCID: 0000-0001-9061-8530, SPIN-код: 6282-7442, AuthorID: 747502.
Электронный адрес: d_ader@mail.ru

Дергачев Сергей Алексеевич
кандидат экономических наук, доцент кафедры информационных и вычислительных систем, Петербургский университет путей сообщения Александра I, Санкт-Петербург. Сфера научных интересов: компьютерное и имитационное моделирование, алгоритмы и методы имитационного моделирования при строительстве и восстановлении транспортных объектов. Автор 30 опубликованных научных работ. ORCID: 0009-0000-9513-6530, SPIN-код: 2513-5950, AuthorID: 750463.
Электронный адрес: deburg@mail.ru

вания [4] и др. В данном исследовании поставлена цель разработать алгоритм решения задачи линейного программирования с использованием симплекс-метода.

Симплекс-метод находит применение для решения широкого круга экономических задач [5–8]. Выбор симплекс-метода обоснован наличием преимуществ по сравнению с другими методами, например методом Гомори [9], а также необходимостью применения уже использованного метода при разработке математической модели решения задачи линейного программирования и в алгоритме решения такой задачи [10].

В процессе разработки проекта решения задачи были использованы госстандарты и руководящие документы по стандартизации:

– при разработке структуры открытого проекта (ГОСТ 34.003–90; ГОСТ 24.104–85; ГОСТ 2.105–95; ГОСТ 7.32–2001; РД 50–34.698–90);

– при использовании терминов и определений программного обеспечения (ГОСТ Р 6.30–2003; ГОСТ 19781–90);

– при изображении схем алгоритмов (ГОСТ 19.701–90).

Постановка задачи исследования

Управленческая задача состоит в подготовке предложения по определению количества каждого из двух возможных типов схем погрузок комплексов спецгруза для максимальной загрузки (по весу) железнодорожного состава F (т).

Для погрузки выделен подвижной железнодорожный состав четырех видов $i=\overline{1,4}$ в количестве:

- четырехосных крытых вагонов $(b(1))$ – 12 единиц;
- двухосных крытых вагонов $(b(2))$ – 8 единиц;
- двухосных платформ $(b(3))$ – 12 единиц;
- четырехосных платформ $(b(4))$ – 16 единиц.

Погрузка комплексов спецгруза может производиться с использованием схем погрузок двух типов $j=\overline{1,2}$, включающих следующее количество и вид железнодорожного подвижного состава:

для одной схемы погрузки 1-го типа $(j=1)$:

- четырехосных крытых вагонов $(a_{(1,1)})$ – 2 единицы/схему;
- двухосных крытых вагонов $(a_{(2,1)})$ – 1 единица/схему;
- четырехосных платформ $(a_{(4,1)})$– 4 единицы/схему;

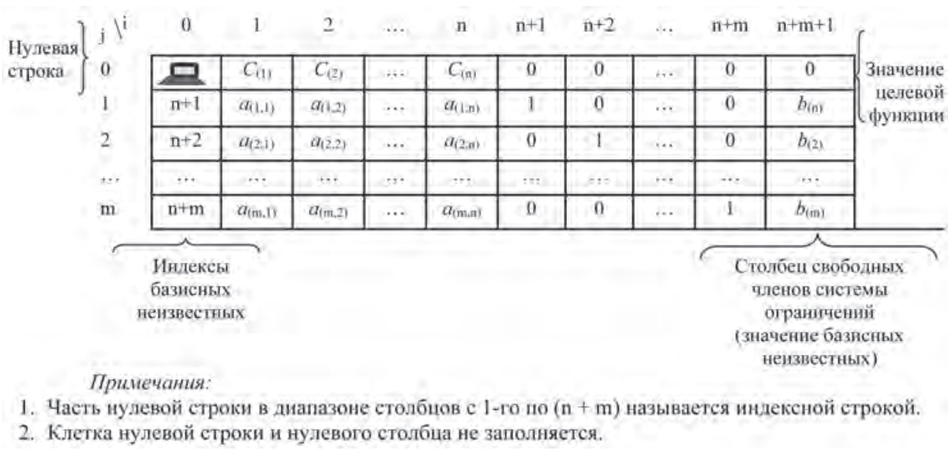
для одной схемы погрузки 2-го типа $(j = 1)$:

- четырехосных крытых вагонов $(a_{(1,2)})$ – 2 единицы/схему;
- двухосных крытых вагонов $(a_{(2,2)})$ – 2 единицы/схему;
- двухосных платформ $(a_{(3,1)})$ – 4 единицы/схему.

Расчетная загрузка железнодорожного подвижного состава в зависимости от типа схемы погрузки составляет:

- для 1-го типа $(j = 1) C_{(1)}= 200$ т/схему;
- для 2-го типа$(j = 2) C_{(2)}= 300$ т/схему.

Симплексная таблица приведена на Рисунке 1.



j \ i	0	1	2	…	n	n+1	n+2	…	n+m	n+m+1
0		$C_{(1)}$	$C_{(2)}$	…	$C_{(n)}$	0	0	…	0	0
1	n+1	$a_{(1,1)}$	$a_{(1,2)}$	…	$a_{(1,n)}$	1	0	…	0	$b_{(1)}$
2	n+2	$a_{(2,1)}$	$a_{(2,2)}$	…	$a_{(2,n)}$	0	1	…	0	$b_{(2)}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	n+m	$a_{(m,1)}$	$a_{(m,2)}$	…	$a_{(m,n)}$	0	0	…	1	$b_{(m)}$

Примечания:

1. Часть нулевой строки в диапазоне столбцов с 1-го по (n + m) называется индексной строкой.
2. Клетка нулевой строки и нулевого столбца не заполняется.

Рисунок 1. Симплексная таблица, заполненная начальным допустимым планом
Источник: здесь и далее рисунки выполнены авторами.

Симплексный метод предусматривает решение задачи с использованием пяти подзадач:
подзадача 1 – «Ввод данных и заполнение симплексной таблицы»;
подзадача 2 – «Выбор ключевого столбца»;
подзадача 3 – «Поиск ведущей строки»;
подзадача 4 – «Пересчет симплексной таблицы»;
подзадача 5 – «Формирование и выдача на печать выходного документа».

Алгоритм «Выбор ключевого столбца»

Предназначение ключевого столбца состоит в том, чтобы определить свободную неизвестную $X_{(j)}$ (при $j=\overline{1,n+m}$), которую следует ввести в базис для начального базисного допустимого плана (далее – БДП).

Для улучшения БДП, записанного в симплексной таблице, необходимо последовательно вводить в базис свободные неизвестные $X_{(j)}$, у которых находящиеся в индексной строке коэффициенты целевой функции $C_{(j)}$ являются положительными числами. При поиске максимума происходит последовательное увеличение абсолютного значения целевой функции F и в конечном счете находится максимум ее абсолютного значения (см. Рисунок 2). Столбец, в котором в строке находится наибольшее положительное число, называется ключевым. Номер ключевого столбца таблицы совпадает с индексом свободной неизвестной, вводимой в базис (в нулевой столбец) для получения БДП.

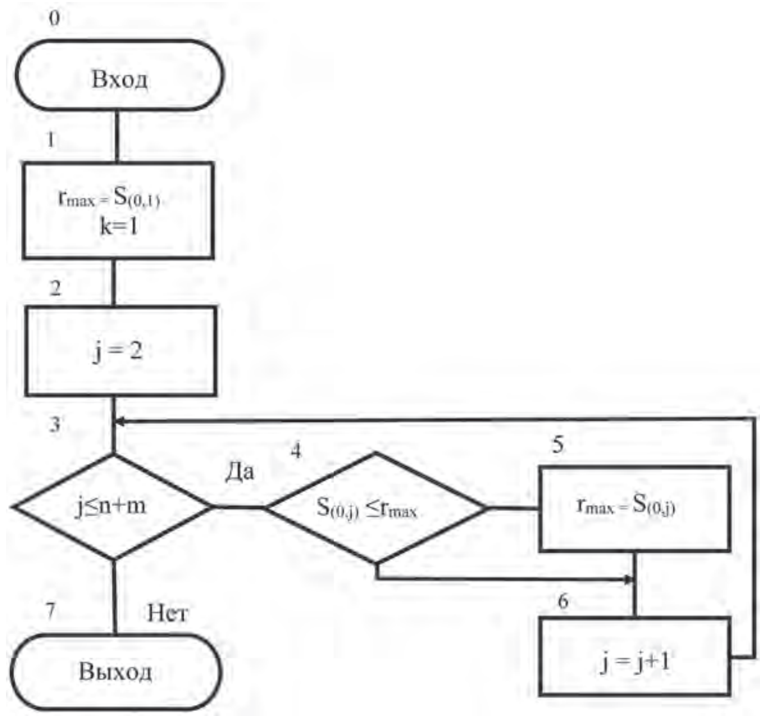


Рисунок 2. Схема алгоритма подзадачи 2 «Выбор ключевого столбца»

Проверка плана на оптимальность выполняется после выбора ключевого столбца (подзадача 2). План считается оптимальным при условии, если в индексной строке нет ни одного положительного числа, то есть при $r_{max} \leq 0$.

Алгоритм «Поиск ведущей строки». Проверка задачи на разрешимость

Элемент таблицы, расположенный на пересечении ключевого столбца и ведущей строки, называют ***генеральным*** (разрешающим) ***элементом*** с обозначением его $S_{(v,k)}$.

Проверка задачи на разрешимость выполняется после поиска ведущей строки (подзадача 3). Если получено значение хотя бы одного $z_{(i)}$ (частного от деления), то задача является разрешимой и выполняется пересчёт симплексной таблицы (подзадача 4). В противном случае задача неразрешима, и тогда выдаётся сообщение: «Задача неразрешима» и прекращается решение задачи (см. Рисунок 3).

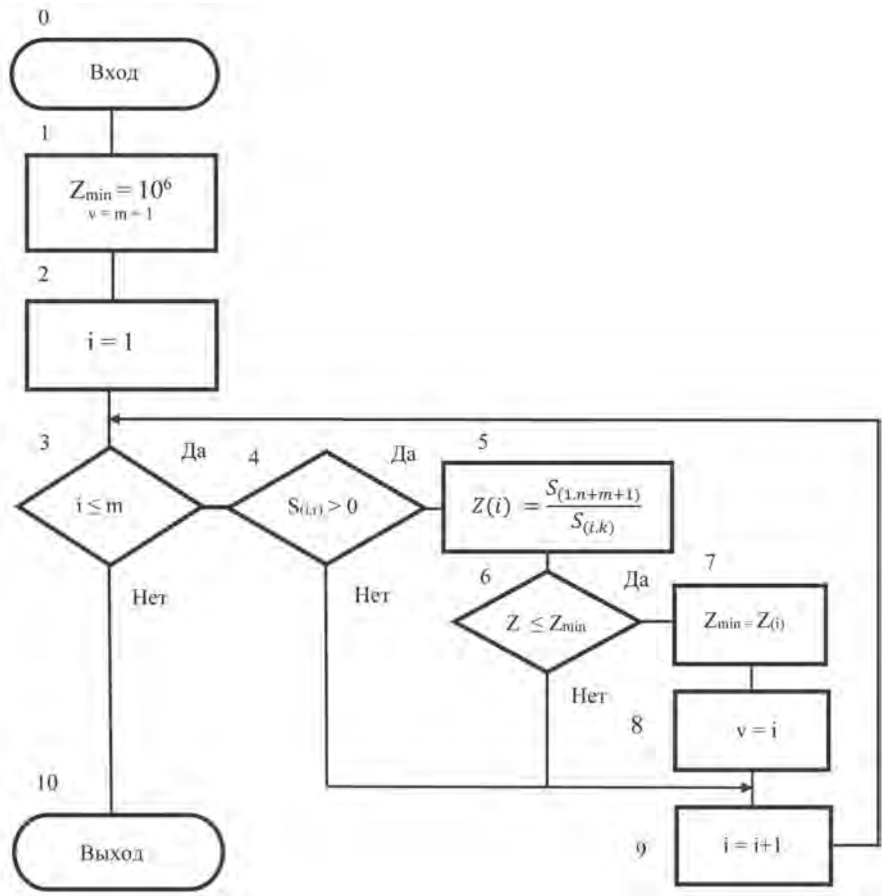
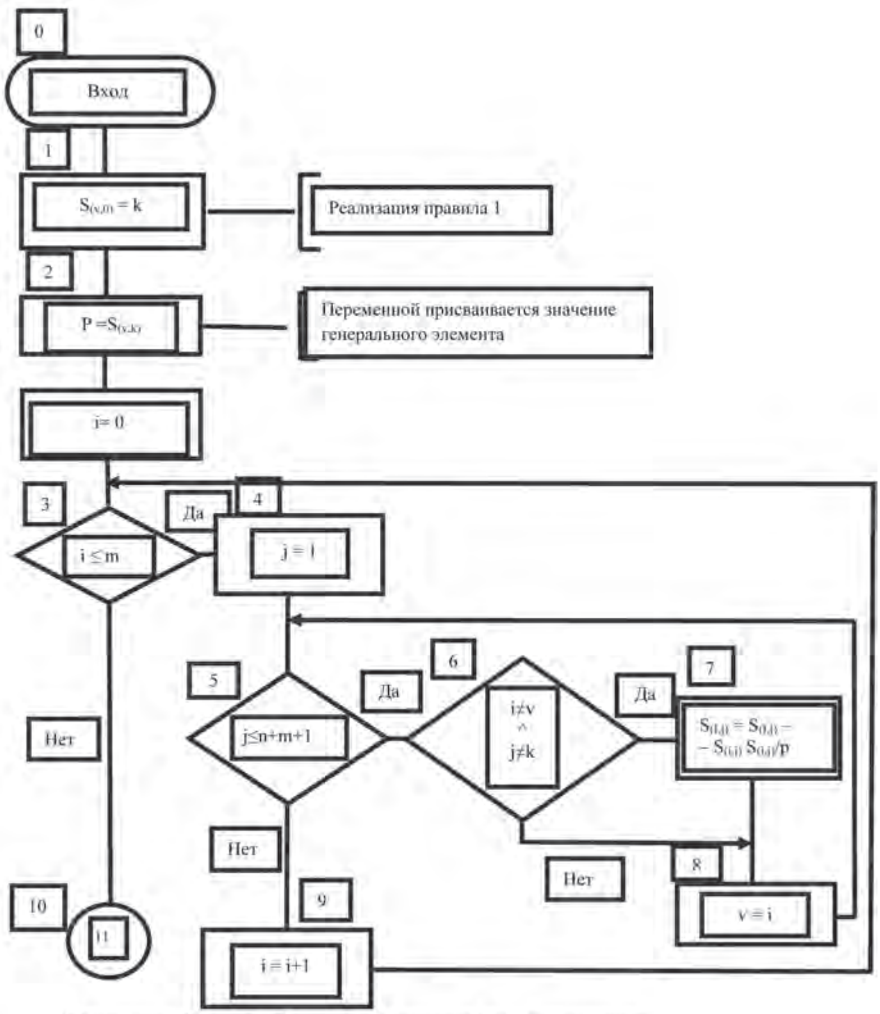


Рисунок 3. Схема алгоритма подзадачи 3 «Поиск ведущей строки»

Алгоритм «Пересчет симплексной таблицы»

Предназначение пересчета симплексной таблицы заключается в замене в базисе базисной неизвестной на свободную неизвестную и во внесении изменений в симплексную таблицу, то есть к пересчету всех ее элементов (см. Рисунки 4, 5).

Для улучшения базисного допустимого плана необходимо производить пересчет полученных симплексных таблиц до тех пор, пока не будет получен оптимальный план. Пересчитываемые значения элементов таблицы помещаются в ту же таблицу на место прежних.



Примечание. Символ ∧ обозначает логическое «и» – конъюнкцию.

Рисунок 4. Схема алгоритма подзадачи 4 «Пересчет симплексной таблицы»

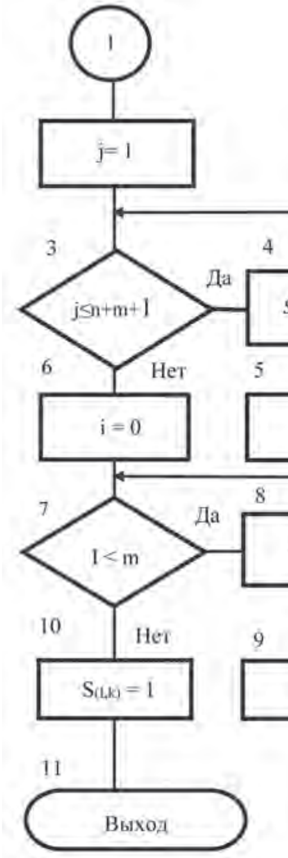
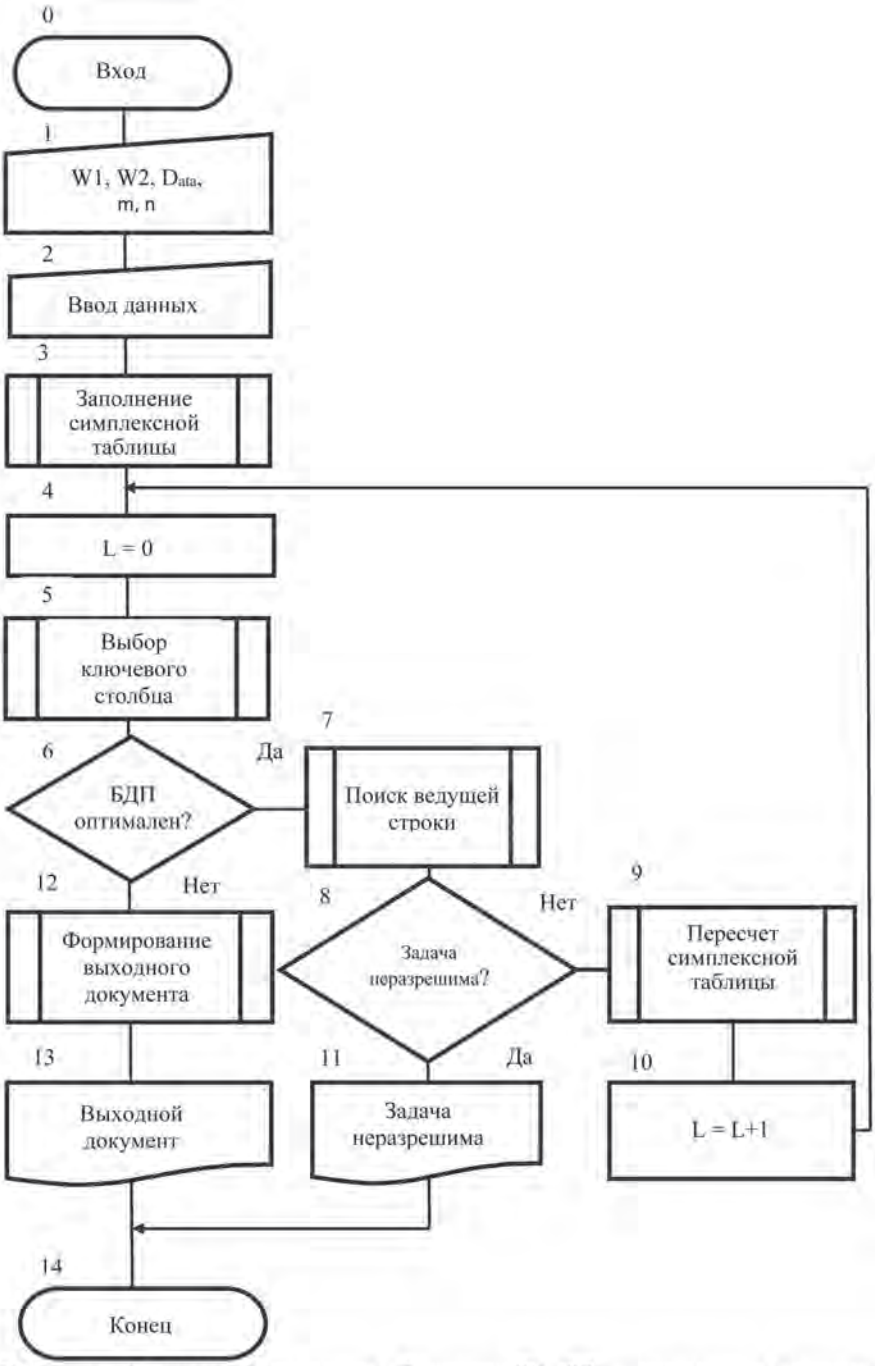


Рисунок 5. Продолжение схемы алгоритма подзадачи 4

Укрупненная схема алгоритма симплекс метода

Укрупненная (принципиальная) схема алгоритма симплекс-метода (без подтверждения решением вычислительной задачи на ЭВМ ее можно назвать замыслом алгоритма решения задачи) приведена на Рисунке 6. Эта схема является простым алгоритмом (имеет один вход и один выход) и в целом представляет собой структуру «Следование». В ее состав включены все пять подзадач и два логических условия, определяющих выбор дальнейшего пути вычислительного процесса.

В укрупненной схеме алгоритма на Рисунке 6 выполняемые процессы четко определены только в символах 1, 4, 10 и 11. В остальных символах конкретные вычислительные процессы не указаны, и эти символы необходимо разукрупнить до уровня, представляющего максимум выгод для последующего составления текста программы. Возможным вариантом для программистов является композиция из трех видов основных структур: последовательной («Следование»), условного перехода («Развилка») и циклической («Цикл»). При этом используемые основные и типовые интегрированные структуры должны быть удобны для восприятия.



Примечание. В символе 1 переменные обозначают: W1, W2 – составляющие реквизиты «Подпись»; Data – дата подписания; *m* – количество ограничений в системе; *n* – количество основных неизвестных.

Рисунок 6. Укрупненная схема алгоритма симплекс-метода

Результаты решения задачи

Результаты решения задачи на калькуляторе представлены в виде блока симплексных таблиц и значений неизвестных вектора X (см. Таблицы 1–4).

Таблица 1

Начальный базисный допустимый план

i/j	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	
0		200	300	0	0	0	0	0	
1	3	2	2	1	0	0	0	12	6
2	4	1	2	0	1	0	0	8	4
3	5	0	[4]	0	0	1	0	12]	3
4	6	4	0	0	0	0	1	16	–

$X_1 = 0$; $X_2=0$; $X_3 = 12$; $X_4 = 8$; $X_5 = 12$; $X_6 = 16$

Таблица 2

Первый промежуточный результат

i/j		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	
0		200	0	0	0	–75	0	900	
1	3	2	0	1	0	–0,5	0	6	3
2	4	[1]	0	0	1	–0,5	0	2]	2
3	2	0	0	0	0	0,25	0	3	–
4	6	4	0	0	0	0	1	16	4

$X_1 = 0$; $X_2=3$; $X_3 = 6$; $X_4 = 2$; $X_5 = 0$; $X_6 = 16$

Таблица 3

Второй промежуточный результат

i/j		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	
0		0	0	0	–200	25	0	–1300	
1	3	0	0	1	–2	–0,5	0	2	4
2	1	1	0	0	1	–0,5	0	2	–
3	2	0	1	0	0	0,25	0	3	12
4	6	0	0	0	–4	[2]	1	8]	4

$X_1 = 2$;$X_2=3$; $X_3 = 2$; $X_4 = 0$; $X_5 = 0$; $X_6 = 8$

Таблица 4

Оптимальный план

0		**0**	**0**	**0**	**–150**	**0**	**–12,5**	**–1400**
1	3	0	0	1	–1	0	–0,25	0
2	1	1	0	0	0	0	0,25	4
3	2	0	1	0	0,5	0	–0,13	2
4	5	0	0	0	–2	1	0,5	4

$X_1 = 4$; $X_2 = 2$; $X_3 = 0$; $X_4 = 0$; $X_5 = 4$; $X_6 = 0$

Примечания к таблицам

1. Приведенный блок таблиц 1–4 содержит:

• таблица 1 – входные данные;

• таблицы 2 и 3 – промежуточные результаты, получаемые после пересчета предыдущей таблицы;

• таблица 4 – оптимальный план, полученный за три итерации.

2. План в таблице 4 является оптимальным потому, что в индексной строке отсутствуют положительные числа – записано четыре нуля и два отрицательных числа (–150 и –12,5).

3. Ниже каждой таблицы указаны значения неизвестных вектора *X*, полученные после очередной итерации.

4. В крайней нижней строке символ «_» (подчеркивание) указывает на ключевой столбец.

5. В крайнем правом столбце таблицы закрывающая квадратная скобка «]» указывает на ведущую строку.

6. Стоящие правее таблицы числа получены при поиске ведущей строки. Знак «–» («прочерк/тире») указывает на то, что знаменатель оказался равным нулю или является отрицательным, и поэтому в этой строке значение числа не определяется.

7. Если в таблице 3 вместо строки 4 за ведущую принять строку 1, то значения элементов вектора *X* останутся такими же, как указано в Таблице 4.

8. Число, заключенное в скобки «[МАЛ ТОЧКА]», является генеральным элементом.

9. Для уяснения смыслового понимания процесса выполняемых расчетов необходимо обратить внимание на приведенные в Таблице 5 изменения имен неизвестных в базисе, которые происходят при пересчете симплексных таблиц.

Таблица 5

Динамика изменения неизвестных в базисе

Номер таблицы	**Свободные неизвестные**	**Базисные неизвестные**
1	$X_{(1)}, X_{(2)}$	$X_{(3)}, X_{(4)}, X_{(5)}, X_{(6)}$
2	$X_{(1)}, X_{(5)}$	$X_{(2)}, X_{(3)}, X_{(4)}, X_{(6)}$
3	$X_{(4)}, X_{(5)}$	$X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}, X_{(6)}$
4	$X_{(4)}, X_{(6)}$	$X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}, X_{(5)}$

В симплексных Таблицах 1–4 значения базисных неизвестных указываются в последнем столбце 7 (а их индексы – в нулевом столбце) в строках с 1-й по m. Значения базисных неизвестных могут быть равны нулю (например, нулевое значение базисной неизвестной $X_{(3)}$, полученное в итоговой Таблице 4). Все свободные неизвестные (их индексы отсутствуют в нулевом столбце) равны нулю.

Заключение

Для поставленной задачи линейного программирования разработан проект ее решения с использованием симплекс-метода. По завершении рассмотренных этапов алгоритма решения управленческой задачи получены результаты решения данной задачи. Преимуществом разработанного алгоритма решения задачи линейного программирования является то, что он позволяет получить оптимальные решения и на этапе планирования, и в ходе оперативного управления, а впоследствии дает возможность повысить эффективность деятельности организации. Алгоритм может быть использован при постановке задач для их последующего решения на ЭВМ. Проект решения задачи разработан в соответствии с требованиями госстандартов и может быть использован в организациях при подготовке управленческих решений. Описанная методика решения задачи линейного программирования с использованием симплекс-метода может быть использована как пример при подготовке задач, решаемых другими математическими методами.

Литература

1. *Соколинский Л.Б., Соколинская И.М.* О новой версии апекс-метода для решения задач линейного программирования // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2023. Т. 12. № 2. С. 5–46. EDN QKTRMC. DOI: 10.14529/cmse230201

2. *Бахтиярова О.Н., Птицына И.В., Подзорова М.И.* Применение геометрического метода для решения задач линейного программирования в курсе дисциплин «Исследование операций» и «Методы оптимизации» // Modern European Research. 2024. Т. 1. № 1. С. 12–22. EDN GVVUZQ.

3. *Ольховский Н.А.* Исследование нейросетевого метода решения задач линейного программирования // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2023. Т. 12. № 4. С. 55–75. EDN AQKNZA. DOI: 10.14529/cmse230402

4. *Усатюк В.С., Егоров С.И.* Поиск треппин-сетов методом смешанного целочисленного линейного программирования с использованием априорного списка кодовых вершин // Известия Юго-Западного государственного университета. 2023. Т. 27. № 4. С. 79–97. EDN RFTGRE. DOI: https://doi.org/10.21869/2223-1560-2023-27-4-79-97

5. *Полежаев С.В.* Симплекс-метод: основные идеи // Современные информационно-коммуникационные технологии. 2022. № 12. С. 44–46. EDN ESCQMQ.

6. *Вихарев Н.А.* Использование симплекс-метода для оптимизации переработки никеля с помощью цифрового двойника // Ceteris Paribus. 2022. № 12. С. 9–11. EDN UPTZPD.

7. *Султанов А.Т.* Применение симплекс-метода для решения задач инженерной оптимизации // Уральский научный вестник. 2023. Т. 10. № 7. С. 8–15. EDN YXTKNL.

8. *Галкин В.А., Кузина Е.Л., Кузина М.А., Василенко Е.А.* Применение симплекс-метода в повышении экологичности производства на транспортных предприятиях // Качество. Инновации. Образование. 2024. № 1 (189). С. 26–33. EDN AFVYFG. DOI: 10.31145/1999-513x-2024-1-26-33

9. *Смагин Б.И., Машин В.В.* Критический анализ решения задачи целочисленного линейного программирования методом Гомори // Наука и Образование. 2022. Т. 5. № 1. EDN OPXXSH

10. *Божко Л.М., Дергачев А.И., Дергачев С.А.* Математическая модель решения задачи линейного программирования с помощью симплекс-метода // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2024. № 3. С. 3–15. EDN ZJJGFQ. DOI: 10.18137/RNU.V9187.24.03.P.3

References

1. Sokolinsky L.B., Sokolinskaya I.M. (2023) On New Version of the Apex Method for Solving Linear Programming Problems. *Bulletin of South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Computer Science*. Vol. 12. No. 2. Pp. 5–46. (In Russian).
2. Bakhtiyarova O.N., Ptitsyna I.V., Podzorova M.I. (2024) Application of the geometric method for solving linear programming problems in the course of the disciplines “Operations Research” and “Optimization Methods”. *Modern European Research*. Vol. 1. No. 1. Pp. 12–22. (In Russian).
3. Olkhovsky N.A. (2023) Study of Neural Network Nodels for Linear Programming. *Bulletin of South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Computer Science.* 2023. Vol. 12. No. 4. Pp. 55–75. (In Russian).
4. Usatyuk V.S., Egorov S.I. (2003) Trapping Sets Search Using the Method of Mixed Integer Linear Programming with a Priori List of Variable Nodes. *Proceedings of the Southwest State University.* Vol. 27. No. 4. Pp. 79–97. (In Russian).
5. Polezhaev S.V. (2022) Simplex-Method: Basic Ideas. *Modern Information and Communication Technologies.* No. 12. Pp. 44–46. (In Russian).
6. Vikharev N.A. (2022) Using the Simplex Method to Optimize Nickel Processing Using a Digital Twin. *Ceteris Paribus.* No. 12. Pp. 9–11. (In Russian).
7. Sultanov A.T. (2023) Application of the Simplex Method for Solving Engineering Optimization Problems. *Ural’skii nauchnyi vestnik* [Ural Scientific Bulletin]. Vol. 10. No. 7. Pp. 8–15. (In Russian).
8. Galkin V.A., Kuzina E.L., Kuzina M.A. (2024) The Simplex Method Application in Increasing the Production Environmental Friendliness at Transport Enterprises. *Quality. Innovation. Education.* No. 1 (189). Pp. 26–33. DOI: 10.31145/1999-513x-2024-1-26-33 (In Russian).
9. Smagin B.I., Mashin V.V. (2022) Critical analysis of the solution of the problem of integer linear programming by the Gomori method. *Nauka i Obrazovanie* [Science and Education]. Vol. 5. No. 1. URL: https://opusmgau.ru/index.php/see/article/view/4520/4552 (accessed 24.10.2024). (In Russian).
10. Bozhko L.M., Dergachev A.I., Dergachev S.A. (2024) Mathematical Model for Solving the Linear Programming Problem Using the Simplex Method. *Bulletin of the Russian New University. Series: Complex Systems: Models, Analysis and Management.* No. 3. Pp. 3–15. DOI: 10.18137/RNU.V9187.24.03.P.3 (In Russian).