

И.И. Кожемякин

ТЕСТИРОВАНИЕ СПЕКТРА УЧАЙКИНА – ЗОЛОТАРЕВА ПО ДАННЫМ ДЛЯ МЕЖЗВЕЗДНОЙ СРЕДЫ

Аннотация. Спектры мощности являются ключевым инструментом в современных исследованиях межзвездной среды. Наряду с магнитогидродинамическими моделями турбулентности, их исследование помогает изучать физические процессы, происходящие в этой среде. Аппроксимация спектров мощности позволяет лучше понять передачу энергии на различных уровнях, что важно для изучения процессов формирования звезд и магнитных полей в межзвездной среде. В статье приведено сравнение различных аппроксимаций спектров мощности, включая классический спектр Колмогорова, и развившиеся на его основе спектры Кармана, логнормальный спектр, а также спектр Учайкина – Золотарева.

Ключевые слова: турбулентность, межзвездная среда, спектр мощности.

I.I. Kozhemyakin

TESTING OF THE UCHAIKIN – ZOLOTAREV POWER SPECTRUM BASED ON DATA FOR THE INTERSTELLAR MEDIUM

Abstract. Power spectra are a key tool in modern research of the interstellar medium. Together with magnetohydrodynamic models of turbulence, their research helps to understand the physical processes occurring in this environment. The approximation of power spectra allows for a better understanding of energy transfer at various levels, which is important for studying the processes of star formation and magnetic fields in the interstellar medium. Various approximations of power spectra were compared, including the classical Kolmogorov spectrum, and the von Karman spectra developed on its basis, the lognormal spectrum, as well as the Uchaikin – Zolotarev spectrum. The Uchaikin – Zolotarev spectrum has proven to be a universal method for approximating power spectra and can be used in further research.

Keywords: turbulence, interstellar medium, power spectrum.

Введение

В современных исследованиях межзвездной среды широко применяются модели турбулентности из магнитогидродинамики (далее – МГД), которые учитывают взаимодействие магнитных полей и плазмы, что играет решающую роль в формировании структуры межзвездной среды. Использование спектров мощности в данных исследованиях является ключевым аспектом, который позволяет лучше понять процессы передачи энергии в различных масштабах, поэтому с зарождения теории спектров мощности турбулентных потоков в работах А.Н. Колмогорова и его гипотезы энергетического каскада [1; 2] они стали неотъемлемой частью анализа турбулентных явлений и широко применяются в различных областях физики, метеорологии, гидродинамики и других дисциплин.

Данная работа является продолжением серии статей, посвященных аппроксимированию спектров мощности [3; 4], в которой проводится сравнительный анализ аппроксимаций спектров мощности со спектром мощности Учайкина – Золотарева.

Кожемякин Илья Игоревич

аспирант, Ульяновский государственный университет, город Ульяновск. Сфера научных интересов: математическое моделирование, астрофизика, информационные технологии. Автор 11 опубликованных научных работ. ORCID: 0000-0001-9585-2625, Scopus Author ID: 57221482784, SPIN-код: 1795-2219, AuthorID: 1246499.
Электронный адрес: kozhilya@gmail.com

Аппроксимации спектра мощности

Гипотеза энергетического каскада, предложенная Колмогоровым, объясняет процесс передачи энергии от крупномасштабных турбулентных движений к мелкомасштабным турбулентным движениям в жидкостях или газах. Колмогоров предположил, что энергия передается через каскадный процесс, где более крупные вихри переносят энергию на более мелкие масштабы путем последовательного распада.

Классическим подходом к анализу спектра мощности турбулентности является *спектр мощности Колмогорова*. В его гипотезе описывается принцип передачи энергии от низких волновых чисел к высоким волновым числам, называемый *энергетическим каскадом*. В промежуточном диапазоне масштабов, так называемом *инерционном интервале*, диапазон масштабов длин статистически изотропен, и его характеристики в равновесии будут зависеть только от скорости, а гипотеза Колмогорова приводит к следующей универсальной форме энергетического спектра

$$P_{\text{Колмогоров}}(k) = Ak^\alpha, \quad (1)$$

и в классической форме принимается $\alpha = -5/3$.

Несмотря на то что эта форма спектра используется повсеместно ввиду своей простоты, инерционный интервал является лишь одним из трех интервалов, на которые спектр турбулентности параметрически и визуально раскладывается в гипотезе энергетического каскада, как показано на Рисунке 1 [5].

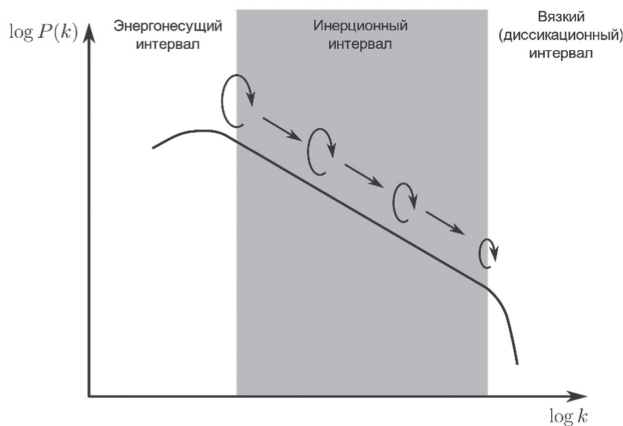


Рисунок 1. Условная схема энергетического каскада
Источник: рисунок выполнен автором на основе [5].

Помимо инерционного, в спектре различают *энергонесущий интервал*, что соответствует малым волновым числам k и характеризует самые большие движения или вихри турбулентности, содержащие большую часть кинетической энергии, и *вязкий интервал* (или *диссипационный*), который соответствует большим k , характеризует наименьшие вихри, ответственные за вязкую диссипацию кинетической энергии турбулентности, в процессе которого происходит преобразование механической энергии в тепловую из-за воздействий сил трения.

Поскольку колмогоровский спектр не может учитывать некоторые аспекты, такие как анизотропия, влияние вязкости и в случае МГД-систем – магнитные поля, которые могут оказать существенное влияние на энергетический каскад, данная аппроксимация не предоставляет полной картины взаимодействия между масштабами и процессами передачи энергии в турбулентности. Это открыло необходимость в создании более комплексных аппроксимаций, которые могли быть дать более полную картину.

Например, вскоре после возникновения гипотезы Колмогорова был предложен спектр фон Кармана [6] как модификация спектра Колмогорова (1) для уточнения формы спектра Колмогорова в энергонесущем интервале:

$$P_{\text{фон Карман}}(k) = A \frac{k^\alpha}{\left[1 + (k/k_e)^2\right]^{(\alpha+\beta)/2}}, \quad (2)$$

в оригинальной работе использовались значения $\alpha = 4$, $\alpha + \beta = 17/6$, $k_e = 1$.

Данный спектр отличается от колмогоровского только в энергонесущем интервале, асимптотически сравниваясь с ним в вязком.

Другой спектр, получивший название *логнормальный*, был предложен в статьях Ли [7; 8] и описывает распределение энергии, которое максимизирует энтропию Шеннона и имеет вид

$$P_{\text{логнормальный}}(k) = \frac{C_1}{k^4} \exp\left\{-\left(\mu - \log k\right)^2 \left(C_2 + C_3 k^2\right)\right\}, \quad (3)$$

где C_1 , C_2 , C_3 – параметры метода множителей Лагранжа, использованного при решении.

Мезофрактальная модель. Спектр Учайкина – Золотарева

Колмогоровская феноменология турбулентности с ее автомодельными степенными законами была прообразом *фрактальной* концепции Мандельброта, которая нашла применение и в вопросах изучения межзвездной среды и стала необычайно популярной в конце минувшего века [9]. Однако чистая фрактальная теория имела некоторые ограничения, связанные в первую очередь с тем, что изучаемые распределения не являются полным фракталами: в определенный момент, когда масштаб становится слишком мелким, распределение теряет фрактальные свойства, сначала просто меняя свою фрактальную размерность, а на особо мелких масштабах становясь однородным. С учетом этих особенностей были сформулированы две производные модели: *мультифрактальная* и *мезофрактальная* [10; 11], являющаяся моделью, в которой функционирует исследуемая в данной статье аппроксимация.

В своей основе мезофрактальная модель использует известное уравнение статистической механики, которое позволяет рассчитать корреляцию плотности между двумя точками, – обобщенное уравнение Орнштейна – Цернике [12]:

$$\xi(\mathbf{x}) = Ab^{-3} p(\mathbf{x}/b; \alpha) + cb^{-3} \int p(\mathbf{x}/b) \xi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (4)$$

в котором в качестве начальных узлов марковских траекторий принято однородное пуассоновское распределение бесконечного множества точек, а прямой корреляционной функции $p(\mathbf{x}/b)$ соответствует собственная функция нелокального оператора дробного лапласиана $\delta^{\alpha/2}$. Решение такого уравнения представляется в виде фурье-образа двухточечной корреляционной функции как

$$P_{УЗ}(k) = A \frac{e^{-(bk)^\alpha}}{1 - ce^{-(bk)^\alpha}}, \quad (5)$$

которое называется *спектр Учайкина – Золотарева* (далее – УЗ).

Полезной особенностью спектра УЗ является его разделение на три интервала энергетического каскада, предложенных в теории Колмогорова (см. Рисунок 1), что проиллюстрировано на Рисунке 2.

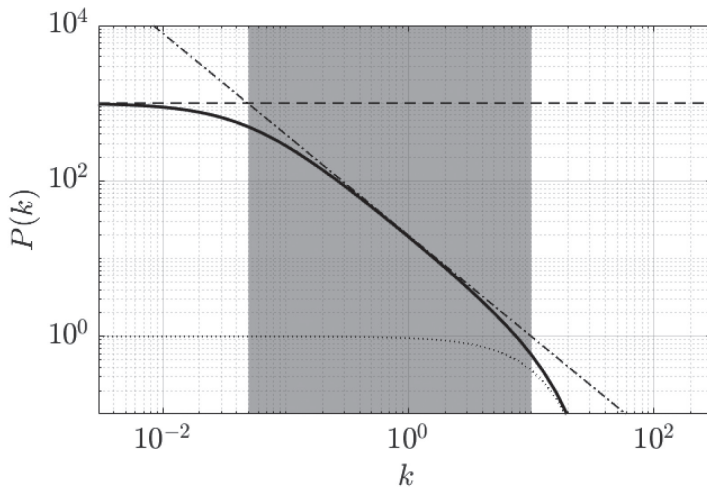


Рисунок 2. Пример спектра Учайкина – Золотарева (5) и его асимптотики на разных интервалах энергетического каскада: сплошная линия – пример спектра для параметров $a = 1,3$; $b = 10^{-1}$; $c = 1 - 10^{-3}$; $A = 1$; серая область – примерная область инерционного интервала, соответствующая $k \in (k_1, k_2)$; штриховая линия – асимптота спектра в энергонесущем интервале (7); штрих-пунктирная линия – асимптотика спектра в инерционном интервале (8); пунктирная линия – асимптотика спектра в вязком интервале (9)

Источник: [здесь](#) и далее рисунки выполнены автором.

Проанализировав нули второй производной логарифма спектра УЗ (5), получим границы инерционного интервала:

$$k_1 \approx b^{-1} (1 - c)^\alpha, \quad P_{УЗ}(k_1) = \frac{A}{1 - c}, \quad (6)$$

$$k_2 \approx b^{-1}, \quad P_{УЗ}(k_2) = A,$$

где k_1 – граница с энергонесущим интервалом; k_2 – граница с диссипационным интервалом.

Энергонесущий интервал соответствует малым k и большим движениям и вихрям турбулентности, в асимптоте $k \rightarrow 0$ принимает значение постоянной:

$$\lim_{k \rightarrow 0} P_{y3}(k) = \frac{A}{1-c} = \text{const.} \quad (7)$$

Вязкий интервал соответствует большим k и наименьшим завихрениям, и спектр уходит в асимптотику экспоненциального вида

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(k) \approx Ae^{-(bk)^\alpha}. \quad (8)$$

Наконец, в инерционном интервале, соответствующем средним значениям волнового числа $k \in (k_1, k_2)$, спектр приблизительно соответствует колмогоровскому спектру:

$$P_{y3}(k) = (Ab^{-\alpha})k^{-\alpha}. \quad (9)$$

Таким образом, можно сформулировать механический смысл параметров спектра УЗ:

- α – параметр колмогоровского спектра в инерционном интервале;
- A – энергия, на которой начинается диссипация турбулентности;
- b – размер волны (так как это обратное значение к k), на котором начинается диссипация турбулентности;
- c – параметр, указывающий, во сколько раз уменьшается энергия в инерционном интервале.

Оценка аппроксимаций

Для оценки аппроксимаций предлагается использовать методы регрессионного анализа для минимизации оценочной функции *среднеквадратичной логарифмической ошибки* (далее – СКЛО):

$$\varepsilon_{\text{СКЛО}} = \frac{1}{n} \sum_i [\ln P(k_i) - \ln \bar{P}_i]^2, \quad (10)$$

где \bar{P}_i – значение исходного спектра для волнового числа k_i ; $P(k_i)$ – спектр, которым аппроксимируется исходный спектр.

Выбор логарифмической ошибки вместо наиболее используемой линейной мотивирован природой спектров мощности: будучи преобразованиями Фурье, имеющими экспоненциальную природу, графики спектров мощности всегда строятся на дважды логарифмических масштабах, показывая, что в процессе турбулентности кинетическая энергия может падать на несколько порядков.

У всех сравниваемых спектров есть параметр, который математически является коэффициентом пропорциональности; для логнормального спектра таким параметром является C_1 , для всех остальных – A . Особенностью подобного параметра является возможность исключения его при регрессионном поиске параметров с минимизацией среднеквадратичной ошибки (как линейной, так и логарифмической). Для этого достаточно показать, что если разложить исследуемый спектр как $P(k) = Ap(k)$ и представить СКЛО (10) как функцию от такого параметра A , то вычисление ошибки может быть упрощено:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\text{СКЛО}}(A) &= \frac{1}{n} \sum_i \left[\ln(Ap(k_i)) - \ln \bar{P}_i \right]^2 = \frac{1}{n} \sum_i \left[\ln A + \ln \frac{p(k_i)}{\bar{P}_i} \right]^2 = \\
&= \left\{ Q_i = \frac{p(k_i)}{\bar{P}_i} \right\} = \frac{1}{n} \sum_i \left[\ln A + \ln Q_i \right]^2 = \\
&= \frac{1}{n} \left[\sum_i (\ln A)^2 + 2 \sum_i \ln A \ln Q_i + \sum_i (\ln Q_i)^2 \right] = \\
&= (\ln A)^2 + \frac{2}{n} \ln A \sum_i \ln Q_i + \sum_i (\ln Q_i)^2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку все переменные внутри Q_i предопределены и не зависят от A , можно оставить его вычисление вне этого процесса и считать его постоянным для данного рассуждения. Выражение (11) имеет параболическую форму со строго положительным параметром перед квадратичным членом, так что для него существует ровно одна точка, в которой СКЛО достигает минимума:

$$\min \ln A = -\frac{1}{2n} \sum_i \ln Q_i \Rightarrow A_{\text{СКЛО}} = \min A = \exp \left[\frac{-1}{2n} \sum_i Q_i \right]. \tag{12}$$

Таким образом, вычисление СКЛО производится по следующему алгоритму:

1. Вычисляем для всех i значения $Q_i = \frac{p(k_i)}{\bar{P}_i}$.
2. На основе полученных значений вычисляем суммы $\sum_i \ln Q_i$ и $\sum_i (\ln Q_i)^2$.
3. Находим значение $A_{\text{СКЛО}}$, используя вычисление (12), в которой будет достигнут минимум СКЛО.
4. Подставляем полученные значения в выражение (11), чтобы найти итоговое значение $\varepsilon_{\text{СКЛО}}$.

Используя эту функцию в качестве оценочной, можно применять методы регрессионного анализа для поиска параметров спектров мощности, при которых СКЛО с оценочной функцией будет минимальной.

В представленной статье для данного процесса используется симплексный метод Нелдера – Мида [13] для набора точек, распределенных равномерно в широком диапазоне пространства \mathbb{R}^{k-1} , где k – количество параметров для исследуемой аппроксимации, при этом, уменьшая размерность на один, необходимо учитывать, что один из параметров вынесен из процесса регрессионного анализа, как показано выше.

Результаты

На Рисунке 3 и в Таблице представлены результаты аппроксимаций некоторых спектров мощности с использованием аппроксимаций, представленных выше.

На Рисунке 3 *a* представлена аппроксимация спектра, представленного в работе [14]. В данной работе исследовалась численно сгенерированная трехмерная МГД-турбулентность с использованием МГД-кода и варьирования входных значений звукового и альвеновского чисел Маха. Представлен случай с меньшим числом Альвена – Маха и толстым корпусом с переменным содержанием.

Тестирование спектра Учайкина – Золотарева по данным для межзвездной среды

На Рисунке 3 б аппроксимирован спектр, представленный в работе [15], где интерпретируются результаты, полученные в статье [16] с использованием гибридного метода решения идеальных изотермических уравнений МГД в периодическом ящике. В последующей статье [15] производился расчет сжимаемой МГД-турбулентности с третьим порядком точности с использованием гибридного существенно неколебательного решения идеальных изотермических уравнений МГД.

На Рисунке 3 в аппроксимирован спектр, представленный в работе [17], в которой производилось исследование распространения сильных ударных волн в двухфазной среде с использованием схемы Годунова второго порядка для решения уравнений МГД.

На Рисунке 3 г аппроксимирован спектр из работы [18]. Здесь авторы продолжают исследование по изучению диффузионного ударного ускорения в остатках сверхновых RX J1713.7-3946, рассматривая этот процесс как трехмерное МГД-моделирование ударной волны, взаимодействующей с межзвездными облаками.

На Рисунке 3 д аппроксимирован спектр энергии из работы [19], в которой изучаются статистика и масштабирование скорости, давления и плотности в сжимаемой турбулентности, в поле течения которого присутствуют крупномасштабные ударные структуры и трубчатые вихревые структуры. Аппроксимированный спектр кинетической энергии демонстрирует масштабное поведение в инерционном диапазоне.

На Рисунке 3 е аппроксимирован спектр, представленный в работе [20], где изучаются пространственно-усредненные спектры мощности по данным из системы обработки астрономических изображений NRAO AIPS. Аппроксимированный спектр является расчетным спектром в фазе теплой нейтральной среды.

Таблица

Значения $\varepsilon_{\text{СКЛО}}$ для аппроксимаций разных исходных спектров и соответствующих аппроксимаций

Исходный спектр	Аппроксимирующий спектр			
	Колмогорова	фон Кармана	логнормальный	УЗ
(а)	1,8291	1,8291	0,043737	0,010049
(б)	0,27905	0,13514	0,24802	0,017519
(в)	0,16846	0,057985	0,14685	0,019763
(г)	0,034753	0,0030914	0,028806	0,00085899
(А)	0,089469	0,0037637	0,0077488	0,00032568
(е)	2,6041	2,6041	0,056634	0,041652

Источник: таблица составлена автором.

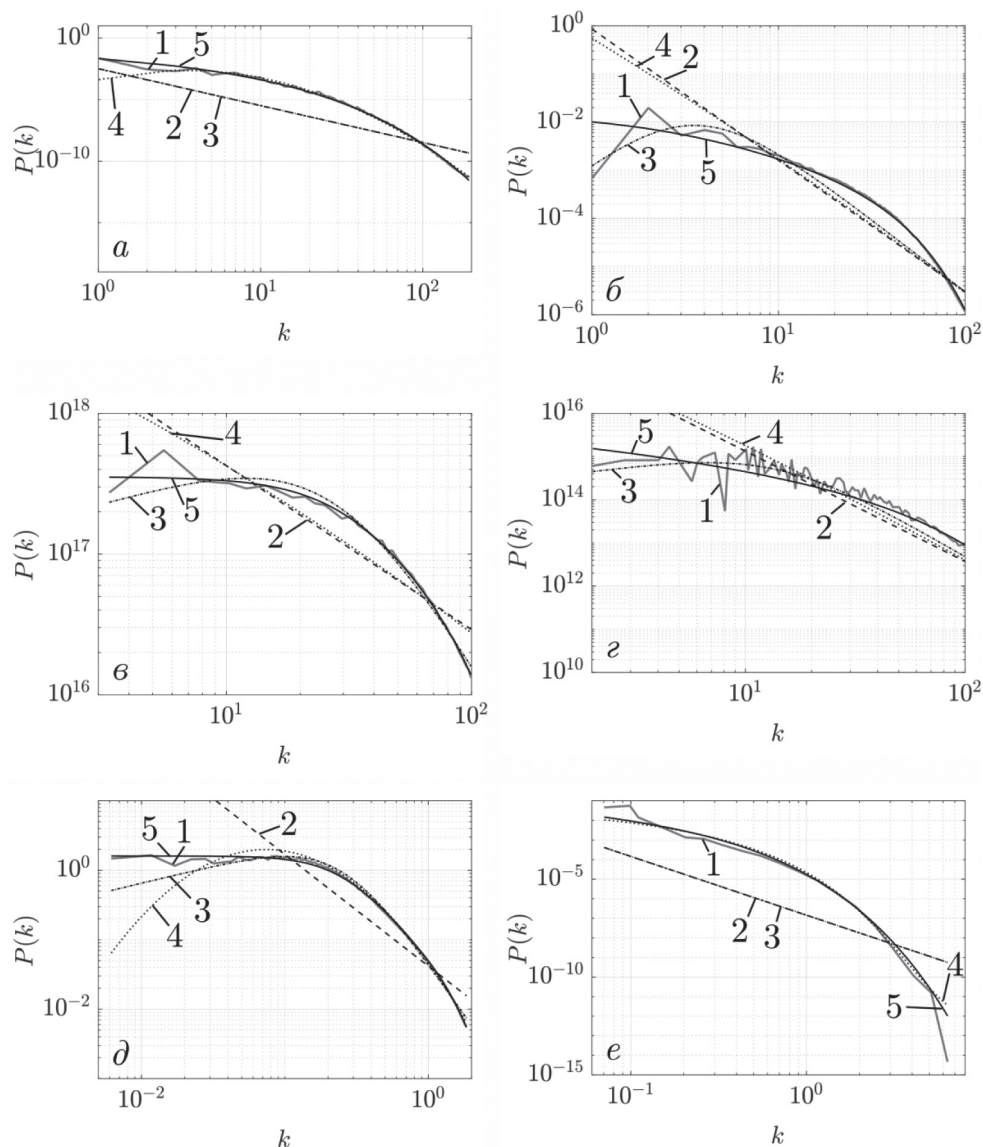


Рисунок 3. Графики аппроксимаций различными спектрами мощности: линия 1 иллюстрирует исходный спектр мощности (источники указаны в тексте статьи); штриховая линия 2 соответствует аппроксимации спектром Колмогорова (1); штрихпунктирная линия 3 – спектром фон Кармана (2); пунктирная линия 4 – логнормальным спектром Ли (3); линия 5 – спектром Учайкина – Золотарева (5).

Источник: **рисунок** выполнен автором на основе данных [13; 14; 16; 17; 18; 19].

Обсуждение

На данных рисунках представлены не все примеры аппроксимаций спектров, однако они достаточно полно демонстрируют особенности, с которыми можно столкнуться при аппроксимации спектров мощности турбулентности.

Так, например, спектр Колмогорова является самой простой аппроксимацией, и для корректной аппроксимации требуется отсечь из аппроксимируемой области энергонесущий и вязкий интервалы, для которых колмогоровский спектр не определяется. Если этого не сделать, то значение СКЛО становится больше на несколько порядков.

Также наблюдается высокая нестабильность аппроксимации логнормальным спектром (3). Для некоторых спектров (например, см. Рисунок 3 а) данный спектр аппроксимирует представленные спектры адекватно. При детальном изучении линий становится ясно, что данная аппроксимация имеет СКЛО, сравнительную с другими аппроксимациями в тех случаях, когда исходный спектр слабо возрастает в энергонесущем интервале, как на Рисунке 3 а или 3 е.

Спектр фон Кармана, с другой стороны, стабильнее реагирует на флуктуации в энергонесущем диапазоне, однако из-за степенной природы спектра СКЛО аппроксимации становится больше на несколько порядков, если у исходного спектра присутствует ярко выраженный вязкий интервал, например, как на Рисунке 3 б.

Спектр Учайкина – Золотарева в данном цикле аппроксимаций показал себя лучше остальных аппроксимаций: значение СКЛО для всех исходных спектров ниже, чем у других спектров. Такая универсальность показывает, что использование спектра мощности Учайкина – Золотарева является весьма эффективной аппроксимацией для широкого ряда спектров, которая позволяет аппроксимировать большое количество спектров с хорошей точностью в автоматическом режиме. Например, для параметров спектра Учайкина – Золотарева можно установить связи с параметрами кластеризации среды. Подобные исследования активно проводились для вопросов распределения галактик [21; 22], в которых данный спектр также применим.

Дополнительно стоит отметить, что до сих пор наши исследования были связаны со спектрами несжимаемой турбулентности, однако, как показано на Рисунке 3 д, спектр сжимаемой турбулентности также аппроксимируется спектром Учайкина – Золотарева, но потребуются дополнительная работа по изучению формирования сжимаемой турбулентности и уместности применения методов несжимаемой турбулентности.

Заключение

В целом проведенное исследование показывает, что спектр мощности Учайкина – Золотарева является весьма эффективной аппроксимацией, которая позволяет аппроксимировать большое количество спектров с хорошей точностью. Дальнейшие исследования могут использовать данную аппроксимацию для получения дополнительной информации об исследуемых моделях. Так, может быть полезным установка связи между параметрами спектра Учайкина – Золотарева и параметрами кластеризации среды.

Литература

1. Колмогоров А. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Успехи физических наук. 1941. Т. 30. № 4. С. 301–305. DOI: 10.3367/UFN.0093.196711h.0476
2. Kolmogorov A.N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number // Journal of Fluid Mechanics. 1962. Vol. 3. No. 1. P. 82–85. DOI: 10.1017/S0022112062000518
3. Uchaikin V.V., Litvinov V.A., Kozhemyakina E.V., Kozhemyakin I.I. A random walk model for spatial galaxy distribution // Mathematics. 2021. Vol. 9. No. 1. P. 98. DOI: 10.3390/math9010098

4. *Uchaikin V.V., Kozhemyakin I.I.* A mesofractal model of interstellar cloudiness // *Universe*. 2022. Vol. 8. No. 5. P. 249. DOI: 10.3390/universe8050249
5. *Pope S.B.* *Turbulent Flows*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 802 p. ISBN 9780511840531.
6. *Von Kármán Th.* Progress in the Statistical Theory of Turbulence // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 1948. Vol. 34. No. 11. P. 530–539. DOI: 10.1073/pnas.34.11.530
7. *Lee T.-W.* Lognormality in Turbulence Energy Spectra // *Entropy*. 2020. Vol. 22. No. 6. P. 669. DOI: 10.3390/e22060669
8. *Lee T.-W., Park J.E.* Entropy and Turbulence Structure // *Entropy*. 2022. Vol. 24. No. 1. P. 11. DOI: 10.3390/e24010011
9. *Combes F.* Astrophysical fractals: Interstellar medium and galaxies // *The Chaotic Universe*. 2020. May. P. 143–172. DOI: 10.1142/9789812793621_0008
10. *Uchaikin V.V.* If the universe were a Lévy-Mandelbrot fractal // *Gravitation and Cosmology*. 2004. Vol. 10. P. 5–24.
11. *Uchaikin V.V.* The mesofractal universe driven by Rayleigh-Lévy walks // *General Relativity and Gravitation*. 2000. Vol. 36. P. 1689–1717. DOI: 10.1023/B:GERG.0000032161.40474.80
12. *Uchaikin V.V., Zolotarev V.M.* *Chance and Stability: Stable Distributions and their Applications*. Walter de Gruyter, 1999. 598 p. ISBN 311093597X.
13. *Lagarias J.C., Reeds J.A., Wright M.H., Wright P.E.* Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions // *Siam Journal on Optimization*. 1998. Vol. 9. No. 1. P. 112–147. DOI: 10.1137/S1052623496303470
14. *Burkhart B., Lazarian A., Ossenkopf V., Stutzki J.* The turbulence power spectrum in optically thick interstellar clouds // *The Astrophysical Journal*. 2013. Vol. 771. P. 123. DOI: 10.1088/0004-637x/771/2/123
15. *Falceta-Gonçalves D., Kowal G., Falgarone E., Chian A.C.-L.* Turbulence in the interstellar medium // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2014. Vol. 21. No. 3. P. 587–604. DOI: 10.5194/npg-21-587-2014
16. *Cho J., Lazarian A.* Compressible magnetohydrodynamic turbulence: Mode coupling, scaling relations, anisotropy, viscosity-damped regime and astrophysical implications // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2003. Vol. 345. P. 325–339. DOI: 10.1046/j.1365-8711.2003.06941.x
17. *Inoue T., Yamazaki R., Inutsuka S.* Turbulence and magnetic field amplification in supernova remnants: Interactions between a strong shock wave and multiphase interstellar medium // *The Astrophysical Journal*. 2003. Vol. 695. No. 2. P. 825–833. DOI: 10.1088/0004-637x/695/2/825
18. *Inoue T., Yamazaki R., Inutsuka S., Fukui Y.* Toward understanding the cosmic-ray acceleration at young supernova remnants interacting with interstellar clouds: Possible applications to RX J1713.7–3946 // *The Astrophysical Journal*. 2011. Vol. 744. No. 1. P. 71. DOI: 10.1088/0004-637x/744/1/71
19. *Wang J., Yang Y., Shi Y., Xiao Z., He X., Chen S.* Statistics and structures of pressure and density in compressible isotropic turbulence // *Journal of Turbulence*. 2013. Vol. 14. No. 6. P. 21–37. DOI: 10.1080/14685248.2013.831989
20. *Choudhuri S., Roy N.* Turbulent power spectrum in warm and cold neutral medium using the Galactic HI 21 cm emission // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2018. Vol. 483. No. 3. P. 3437–3443. DOI: 10.1093/mnras/sty3342
21. *Yamamoto K., Nakamichi M., Kamino A., Bassett B.A., Nishioka H.* A Measurement of the quadrupole power spectrum in the clustering of the 2dF QSO Survey // *Publications of the Astronomical Society of Japan*. 2014. Vol. 793. No. 2. P. 116. DOI: 10.1093/pasj/58.1.93

22. Uzgl B, Aguirre J, Bradford C, Lidz A. Measuring galaxy clustering and the evolution of [CII] mean intensity with far-IR line intensity mapping during $0.5 < z < 1.5$ // *The Astrophysical Journal*. 2014. Vol. 793. No. 2. P. 116. DOI: 10.1088/0004-637X/793/2/116

References

1. Kolmogorov A. (1941) The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds' Numbers. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*. No. 30. No. 4. Pp. 301–305. DOI: 10.1070/PU-1968v010n06ABEH003710 (In Russian).
2. Kolmogorov A.N. (1962) A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 13. No. 1. Pp. 82–85. DOI: 10.1017/S0022112062000518
3. Uchaikin V.V., Litvinov V.A., Kozhemyakina E.V., Kozhemyakin I.I. (2021) A random walk model for spatial galaxy distribution. *Mathematics*. Vol. 9. No. 1. Pp. 98. DOI: 10.3390/math9010098
4. Uchaikin V.V., Kozhemyakin I.I. (2022) A mesofractal model of interstellar cloudiness. *Universe*. Vol. 8. No. 5. Pp. 249. DOI: 10.3390/universe8050249
5. Pope S.B. (2000) *Turbulent Flows*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 802 c. ISBN 9780511840531.
6. Von Kármán Th. (1948) Progress in the Statistical Theory of Turbulence. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. Vol. 34. No. 11. Pp. 530–539. DOI: 10.1073/pnas.34.11.530
7. Lee T.-W. (2020) Lognormality in Turbulence Energy Spectra. *Entropy*. Vol. 22. No. 6. Pp. 669. DOI: 10.3390/e22060669
8. Lee T.-W., Park J.E. (2022) Entropy and Turbulence Structure. *Entropy*. Vol. 24. No. 1. Pp. 11. DOI: 10.3390/e24010011
9. Combes F. (2020) Astrophysical fractals: Interstellar medium and galaxies. *The Chaotic Universe*. May. Pp. 143–172. DOI: 10.1142/9789812793621_0008
10. Uchaikin V.V. (2004) If the universe were a Lévy-Mandelbrot fractal. *Gravitation and Cosmology*. Vol. 10. Pp. 5–24.
11. Uchaikin V.V. (2000) The mesofractal universe driven by Rayleigh-Lévy walks. *General Relativity and Gravitation*. Vol. 36. Pp. 1689–1717. DOI: 10.1023/B:GERG.0000032161.40474.80
12. Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. (1999) *Chance and Stability: Stable Distributions and their Applications*. Walter de Gruyter. 598 c. ISBN 311093597X.
13. Lagarias J.C., Reeds J.A., Wright M.H., Wright P.E. (1998) Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *Siam Journal on Optimization*. Vol. 9. No. 1. Pp. 112–147. DOI: 10.1137/S1052623496303470
14. Burkhart B., Lazarian A., Ossenkopf V., Stutzki J. (2013) The turbulence power spectrum in optically thick interstellar clouds. *The Astrophysical Journal*. Vol. 771. Pp. 123. DOI: 10.1088/0004-637x/771/2/123
15. Falceta-Gonçalves D., Kowal G., Falgarone E., Chian A.C.-L. (2014) Turbulence in the interstellar medium. *Nonlinear Processes in Geophysics*. Vol. 21. No. 3. Pp. 587–604. DOI: 10.5194/npg-21-587-2014
16. Cho J., Lazarian A. (2003) Compressible magnetohydrodynamic turbulence: Mode coupling, scaling relations, anisotropy, viscosity-damped regime and astrophysical implications. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. Vol. 345. Pp. 325–339. DOI: 10.1046/j.1365-8711.2003.06941.x
17. Inoue T., Yamazaki R., Inutsuka S. (2011) Turbulence and magnetic field amplification in supernova remnants: interactions between a strong shock wave and multiphase interstellar medium. *The Astrophysical Journal*. Vol. 695. No. 2. Pp. 825–833. DOI: 10.1088/0004-637x/695/2/825

18. Inoue T., Yamazaki R., Inutsuka S., Fukui Y. (2011) Toward understanding the cosmic-ray acceleration at young supernova remnants interacting with interstellar clouds: Possible applications to RX J1713.7–3946. *The Astrophysical Journal*. Vol. 744. No. 1. Pp. 71. DOI: 10.1088/0004-637x/744/1/71
19. Wang J., Yang Y., Shi Y., Xiao Z., He X., Chen S. (2013) Statistics and structures of pressure and density in compressible isotropic turbulence. *Journal of Turbulence*. Vol. 14. No. 6. Pp. 21–37. DOI: 10.1080/14685248.2013.831989
20. Choudhuri S., Roy N. (2018) Turbulent power spectrum in warm and cold neutral medium using the Galactic HI 21 cm emission. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. Vol. 483. No. 3. Pp. 3437–3443. DOI: 10.1093/mnras/sty3342
21. Yamamoto K., Nakamichi M., Kamino A., Bassett B.A., Nishioka H. (2014) A Measurement of the Quadrupole Power Spectrum in the Clustering of the 2dF QSO Survey. *Publications of the Astronomical Society of Japan*. Vol. 793. No. 2. Pp. 116. DOI: 10.1093/pasj/58.1.93
22. Uzgil B., Aguirre J., Bradford C., Lidz A. (2014) Measuring galaxy clustering and the evolution of [CII] mean intensity with far-IR line intensity mapping during $0.5 < z < 1.5$. *The Astrophysical Journal*. Vol. 793. No. 2. Pp. 116. DOI: 10.1088/0004-637X/793/2/116