

А.И. Канарейкин

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ
ОДИНОЧНОГО КРУГЛОГО ПРОВОДА НАД ЗАЗЕМЛЕННОЙ
ПЛАСТИНОЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КОНФОРМНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ

Аннотация. Статья посвящена вопросу моделирования электрического поля с помощью применения метода конформных отображений. Раскрывается суть данного метода. Получено выражение по расчету сложного двумерного электрического поля круглого провода над заземленной пластиной. При этом само поле неоднородное. Полученное решение является довольно простым, что говорит об эффективности применения данного метода. Полученный результат может быть полезным для расчета ряда инженерных задач в области моделирования электрических полей сложных систем с целью снижения потерь при передаче электроэнергии.

Ключевые слова: моделирование, электрическое поле, метод конформных отображений, конформное преобразование, СВЧ-устройства, функция комплексного переменного.

A.I. Kanareykin

MODELING OF THE TWO-DIMENSIONAL ELECTRIC FIELD
OF A SINGLE ROUND WIRE OVER A GROUNDED PLATE USING
THE CONFORMAL MAPPING METHOD

Abstract. The article is devoted to the issue of modeling the electric field using the conformal mapping method. The essence of this method is revealed. The author obtained an expression based on the calculation of a complex two-dimensional electric field of a round wire over a grounded plate. At the same time, the field itself is heterogeneous. The resulting solution is quite simple. Which indicates the effectiveness of this method. The obtained result can be useful for calculating a number of engineering problems in the field of modeling electric fields of complex systems in order to reduce losses during the transmission of electricity.

Keywords: modeling, electric field, conformal mapping method, conformal transformation, microwave devices, complex variable function.

Введение

Расчет электрических полей представляет собой практический интерес, но при этом является довольно трудоемким процессом. Как известно, проектирование новых электронных компонентов и систем СВЧ-устройств требует более точных расчетов. Для этого необходимы более точные модели, следовательно, отыскание более эффективных методов моделирования. Одним из таких методов является метод конформных отображений.

Еще в XIX веке Б. Риманом впервые был выдвинут вопрос о конформном отображении, что стало основой для дальнейших исследований в этой области [3].

Основной сложностью метода является нахождение вида самой функции для конкретной реальной системы. На практике при отыскании функции конформного отображения используются либо специальные каталоги конформных отображений, либо она ищется посредством последовательных проб.

Канарейкин Александр Иванович

кандидат технических наук, доцент кафедры общей физики. Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе (МГРИ), Москва. Сфера научных интересов: теплофизика; солнечная энергетика; математическое моделирование; преподавание физики в системе высшего образования. Автор более 40 опубликованных научных работ. Электронный адрес: kanareykins@mail.ru

В частности, моделирование высокочастотных волноведущих связанных линий передачи требует анализа двумерного электростатического поля. Такой анализ, включающий решение задачи Дирихле для решения уравнения Лапласа, осложнен математическими выкладками. Поэтому часто приходится прибегать к специальным компьютерным программам [1; 4–7; 10].

Метод конформных преобразований широко применяется и в других разделах физики [8; 9].

Работа посвящена вопросу расчета сложного двумерного электрического поля круглого провода над заземленной пластиной на основе метода конформных отображений.

Постановка задачи

Пусть дан одиночный круглый провод над заземленной пластиной. Данная конструкция может применяться для передачи СВЧ-энергии. С целью снижения потерь на излучение в пространство между проводом и пластиной помещается плоский слой материала, который представляет собой изолятор с высокой диэлектрической проницаемостью ε , как это показано на Рисунке 1.

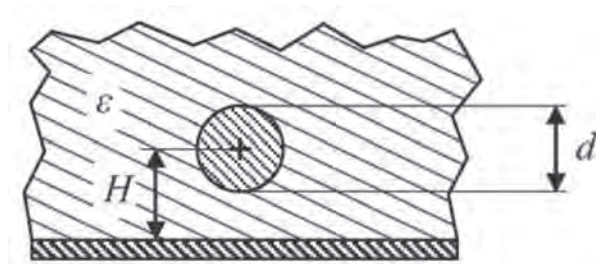


Рисунок 1. Поперечное сечение линии

Решение задачи

Для дальнейших исследований и упрощения расчетов введем декартову систему координат, а саму задачу представим в следующем графическом виде (см. Рисунок 2).

Обозначим $\Gamma = z : |z - H| = a$ – окружность, U – напряженность поля в точке (x, y) . Известно, что U должна быть гармонической функцией [2], то есть для нее выполняется условие

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0; \quad (1)$$

также она должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$U(x, y)|_{x=0} = 0 ; U(x, y)|_{\Gamma} = E_0 . \tag{2}$$

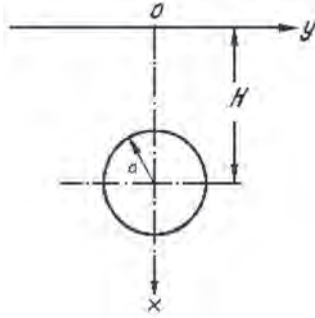


Рисунок 2. Чертеж исследуемой линии

Данная область является двусвязной, поэтому отобразим ее конформно на круговое кольцо: $K = \{ \omega : r < |\omega| < 1 \}$.

В круговом кольце функция \tilde{U} является гармонической в кольце K , и она должна удовлетворять следующим условиям:

$$\tilde{U}|_{|\omega|=1} = 0 ; \tilde{U}|_{|\omega|=r} = E_0 . \tag{3}$$

Задача сводится к решению задачи Дирихле, которая в кольце K имеет вид

$$\tilde{U} = E_0 \log_r |\omega| . \tag{4}$$

Далее проведем проверку, что функция \tilde{U} является гармонической. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$\tilde{U} = \ln |z| = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) . \tag{5}$$

Найдем для нее частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} ; \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} ; \tag{7}$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} ; \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} . \tag{9}$$

Сложив выражения (7) и (9), получим равенство (1). Таким образом, получили верное равенство, следовательно, доказали гармоничность исследуемой функции.

Теперь определим параметр r в выражении (4). Для этого рассмотрим произвольную точку, расположенную на расстоянии $x = h + a$. При отображении ее образом будет точка, лежащая на окружности радиуса $|\omega| = r$:

$$r = \frac{H+a-\sqrt{H^2-a^2}}{H+a+\sqrt{H^2-a^2}}. \quad (5)$$

В результате такого отображения получили дробно-линейную функцию. Как следует из теории, она обладает круговым свойством, а именно: прямые и окружности отображаются сами в себя. Поэтому при помощи данного преобразования отобразим рассматриваемую область на круговое кольцо:

$$\omega = \frac{z-c}{z+c}, \quad (6)$$

где $c = \sqrt{H^2 - a^2}$.

Подставим выражение (6) в (4), получим

$$U(x, y) = E_0 \log_r \left| \frac{z - \sqrt{H^2 - a^2}}{z + \sqrt{H^2 - a^2}} \right|. \quad (7)$$

Тогда искомое решение нашей основной задачи принимает следующий вид:

$$E = \frac{E_0}{\ln \frac{H+c}{a}} \ln \frac{\sqrt{(x^2 - c^2 + y^2)^2 + 4c^2 y^2}}{(x-c)^2 + y^2}. \quad (8)$$

Далее воспользуемся выражением для определения поля равномерно заряженного бесконечного цилиндра с линейной плотностью заряда λ :

$$E_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon R}. \quad (9)$$

В итоге напряженность электрического поля

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon la} \frac{1}{\ln \frac{H+c}{a}} \ln \frac{\sqrt{(x^2 - c^2 + y^2)^2 + 4c^2 y^2}}{(x-c)^2 + y^2}. \quad (10)$$

Как видим, полученное выражение оказалось достаточно простым. Оно содержит в основном дроби и логарифмические выражения, что показывает преимущество метода конформного отображения.

Далее для наглядности полученного результата построим график электрического поля для данного случая с конкретными параметрами. Пусть расстояние H относится к радиусу a в отношении $5/3$. Далее подставим данные в формулу (10). Для удобства в построении приведем напряженность поля к безразмерному виду

$$\theta = \ln \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 - 16)^2 + 64y^2}}{(x-4)^2 + y^2}. \quad (11)$$

На Рисунке 3 представлен трехмерный график поля для данного случая.

Как видно из рисунка, полученное решение (10) удовлетворяет заданным граничным условиям (2).

Заключение

Таким образом, раскрыты понятие и сущность самого метода конформных отображений. Получена формула для нахождения электрического поля одиночного круглого провода над заземленной пластиной. С ее помощью можно анализировать приведенную конструкцию с целью уменьшения потерь при передаче СВЧ-энергии. Показано преиму-

Моделирование двумерного электрического поля одиночного круглого провода ...

щество применения данного метода при нахождении электрического поля круглого провода над заземленной пластиной, что может быть полезным для практических расчетов электрических полей сложных систем.

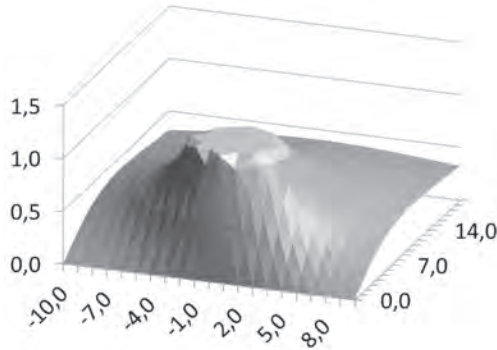


Рисунок 3. Электрическое поле линии круглого провода над заземленной пластиной при $H/a = 5/3$

Литература

1. Бинс К.П., Лауренсон К. Анализ и расчет электрических и магнитных полей: перевод с англ. – М.: Наука, 1970. 376 с.
2. Канарейкин А.И. Применение метода конформного отображения в теплофизике // Инновационная наука. 2021. № 4. С. 51–53.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977. 736 с.
4. Лаврик В.И., Фильчакова В.П., Яшин А.А. Конформные отображения физико-топологических моделей. Киев: Наукова думка, 1990. 376 с.
5. Проектирование полосковых устройств СВЧ: учебное пособие. Ульяновск: Изд-во Ульяновского государственного технического университета, 2001. 123 с.
6. Сычев А.Н., Стручков С.М., Путилов В.Н., Чекалин М.А. Численные конформные преобразования для моделирования связанных круглых проводников со смещением в круглом экране // КрыМиКо'2014, Севастополь, 7–13 сентября 2014 г.: материалы конф. В 2 т. Т. 1. С. 125–126.
7. Яшин А.А. Разработка элементарной базы микроэлектронных устройств с использованием геометрических методов ТФКП // Зарубежная радиоэлектроника. 1985. № 6. С. 16–33.
8. Carsson E., Gevorgian S.S. (1999) Conformal mapping of the field and charge distributions in multilayered substrate CPW's. IEEE Transactions on Microwave Theory and Tech., vol. 47, pp. 1544–1552.
9. Chen E., Chou S.Y. (1997) Characteristics of coplanar transmission lines on multilayer substrates: Modeling and experiments. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 45, pp. 939–945.
10. Driscoll T.A., Trefethen L.N. (2002) Schwarz-Christoffel mapping. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 132 p.

References

1. Binns K.P., Laurenson K. (1970) *Analiz i raschet elektricheskikh i magnitnykh polei* [Analysis and calculation of electric and magnetic fields]. Moscow, Nauka Publishing, 376 p. (in Russian).

2. Kanareykin A.I. (2021) *Primenenie metoda konformnogo otobrazheniya v teplofizike* [Application of the conformal mapping method in thermophysics]. *Innovatsionnaya nauka*, No. 4, pp. 51–53 (in Russian).
3. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. (1977) *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of a complementary variable]. Moscow, Nauka Publishing, 736 p. (in Russian).
4. Lavrik V.I., Filchakova V.P., Yashin A.A. (1990) *Konformnyye otobrazheniya fiziko-topologicheskikh modelei* [Conformal mappings of physico-topological models]. Kiev, Naukova dumka Publishing, 376 p. (in Russian).
5. *Proektirovanie poloskovykh ustroystv SVCh* [Designing microwave strip devices]: Ulyanovsk, Publishing House Ulyanovsk State Technical University, 123 p. (in Russian).
6. Sychev A.N., Struchkov S.M., Putilov V.N., Chekalin M.A. (2014) *Chislennyye konformnyye preobrazovaniya dlya modelirovaniya svyazannykh kruglykh provodnikov so smeshcheniem v kruglom ekrane* [Numerical conformal transformations for modeling coupled round conductors with displacement in a round screen]. *KryMiKo'2014, Sevastopol', 7–13 sentyabrya 2014 g.* [KryMiKo'2014, Sevastopol, September 7–13], vol. 2, pp. 125–126 (in Russian).
7. Yashin A.A. (1985) *Razrabotka elementarnoi bazy mikroelektronnykh ustroystv s ispol'zovaniem geometricheskikh metodov TFKP* [Development of the elementary base of microelectronic devices using geometric methods of TFCP]. *Zarubezhnaya radioelektronika*, No. 6, pp. 16–33 (in Russian).
8. Carsson E., Gevorgian S.S. (1999) Conformal mapping of the field and charge distributions in multilayered substrate CPW's. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Tech.*, vol. 47, pp. 1544–1552.
9. Chen E., Chou S.Y. (1997) Characteristics of coplanar transmission lines on multilayer substrates: *Modeling and experiments. IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 45, pp. 939–945.
10. Driscoll T.A., Trefethen L.N. (2002) *Schwarz-Christoffel mapping*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 132 p.