

УДК 519.81

И.С. Клименко¹
М.А. Плуталов²
Г.А. Чеботарев³

I.S. Klimenko
M.A. Plutalov
G.A. Chebotarev

К ФОРМИРОВАНИЮ РАНГОВОЙ ШКАЛЫ ОПТИМИЗМА КРИТЕРИЕВ ВЫБОРА РЕШЕНИЙ В «ИГРЕ С ПРИРОДОЙ»

TO THE FORMATION OF RANK SCALE OF CRITERIONS OPTIMISM FOR SELECTION OF SOLUTIONS IN THE “GAME WITH NATURE”

Проведен анализ степени взаимной корреляции ряда критериев выбора решений в условиях статистической неопределенности и на его основе между ними установлены отношения нестрогого порядка. Это позволило предложить порядковую шкалу, дающую возможность варьировать соотношением оптимизм – пессимизм при решении задач класса «игра с природой». Формирование такой шкалы оказалось возможным благодаря обнаружению критерия существенного риска, занимающего промежуточную позицию между критериями Лапласа и максимакса.

Ключевые слова: стратегия, решение, критерий, альтернатива, матрица, оптимизм.

The analysis of cross-correlation degree of a number of criteria for the selection of solutions under statistical indefiniteness and on this basis the relationship of non-strict order has been established. It is allowed to offer ordinal scale opening the possibility to vary the pessimism – optimism ratio in solving the “game with nature” tasks. Such scale creation became possible due to revealing of significant risk criterion, which occupies an intermediate position between Laplace and maximax criteria.

Keywords: strategy, solution, criteria, alternative, matrix, optimism.

Введение

В работах [1–2] мы показали ограниченную возможность использования критерия Гурвица для взвешенного выбора альтернатив в задаче «игры с природой». В этой связи мы обратили внимание на необходимость формирования по-

¹ Доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем в экономике и управлении АНО ВО «Российский новый университет».

² Аспирант АНО ВО «Российский новый университет».

³ Аспирант АНО ВО «Российский новый университет».

рядковой (ранговой) шкалы оптимизма критериев, наличие которой представляется весьма полезным для ЛПР (лица, принимающего решение).

В настоящей работе мы приступаем к формированию такой шкалы, и для этого в дополнение к ранее рассмотренным классическим критериям вводим в рассмотрение ряд дополнительных критериев. Часть из них строится на матрице риска, введенной при формировании критерия Сэвиджа [3–4]. Мы вводим их как аналоги классических критериев, традиционно формируемых на матрице эффективности [5–8].

Обсуждая в [1] предварительные подходы

к построению искомой шкалы, мы рассматривали коэффициенты взаимной корреляции пар следующих критериев: Вальда, Сэвиджа, Лапласа (среднего выигрыша) и максимакса. Роль критерия Гурвица при этом сводится к заданию градаций такой шкалы в соответствии со значениями его коэффициента оптимизма. Очевидно, что критерии Вальда и максимакса целесообразно рассматривать в качестве границ обсуждаемой шкалы. Формально минимальное значение оптимизма следовало бы связать с минимальным критерием матрицы эффективности. Однако он по очевидным причинам на практике не используется, поскольку выбор по критерию Вальда (максимина) обеспечивает гарантированный результат.

Ранжирование четырех указанных критериев показывает следующее отношение нестрогого порядка:

$$K_V < K_S < K_L < K_M. \quad (1)$$

Здесь использованы следующие обозначения: K_V , K_S , K_L и K_M – критерии Вальда, Сэвиджа, Лапласа и максимакса соответственно, знак $<$ означает «менее предпочтителен». В общем случае критерии здесь связаны между собой отношением «менее (более) оптимистичен или эквивалентен», что допускает реализуемую на практике [1; 2] возможность эквивалентности всех рассматриваемых критериев (выбор всеми критериями одной и той же оптимальной альтернативы).

С учетом результата ранжирования показателей степени взаимной корреляции всех перечисленных критериев на формируемой шкале оптимизма критерий Сэвиджа располагаем следом за критерием Вальда (коэффициент их взаимной корреляции $\lambda_{SV} = 0,50$). Далее помещаем критерий Лапласа (коэффициент взаимной корреляции с критерием Сэвиджа $\lambda_{LS} = 0,62$ и с критерием максимакса $\lambda_{LM} = 0,34$). Поскольку коэффициент взаимной корреляции критериев Лапласа и Вальда $\lambda_{LV} = 0,36$, т.е. практически совпадает с λ_{LM} , то критерий Лапласа целесообразно позиционировать вблизи центра шкалы оптимизма.

Таким образом, остается незаполненным значительный промежуток между критериями Лапласа и максимакса, в котором желательно расположить как минимум один критерий с относительно высокой степенью оптимизма. Не лишним представляется также подбор и других критериев, которые, будучи размещенными между уже задействованными критериями, позволили бы варьировать чувствительностью шкалы.

1. Привлечение дополнительных критериев

Для решения этих задач были привлечены следующие дополнительные критерии: известный критерий произведения (K_P), сформированный на матрице эффективности [6–7] и сформированные на матрице риска критерии максимакса (K_{MR}), усредненного (среднего) риска (K_{AR}) и максимина (K_{Mm}). Критерий рискового максимакса K_{MR} формируется после преобразования матрицы эффективности в матрицу потерь (риска). Каждый элемент матрицы риска вводится как разность между максимальным и текущим значениями эффективности в столбце. Затем в полученной матрице в качестве оптимальной выбирается альтернатива с наибольшим значением максимума. Критерии усредненного риска (K_{AR}) и рискового максимина (K_{Mm}) строятся по аналогии с критериями Лапласа и Вальда соответственно.

Формально новые критерии, сформированные на матрице риска, могут быть представлены следующим образом.

Критерий максимакса риска:

$K_{MR} = \max_i \max_j \Delta x_{ij}$ (Δx_{ij} – разность между максимальной и текущей оценками в каждом столбце матрицы риска).

Критерий усредненного риска:

$$K_{AR} = \max_i \left(\frac{1}{n} \Delta x_{ij} \right).$$

Критерий максимина риска:

$$K_{Mm} = \max_i \min_j \Delta x_{ij}.$$

Расчет степени взаимной корреляции введенных критериев с классическими критериями и между собой дал следующие результаты.

1. Коэффициенты взаимной корреляции критерия рискового максимакса со всеми остальными критериями: $\lambda_{MR-M} = 0,12$; $\lambda_{MR-L} = 0,38$; $\lambda_{MR-S} = 0$; $\lambda_{MR-V} = 0$; $\lambda_{MR-P} = 0$; $\lambda_{MR-AR} = 0,38$; $\lambda_{MR-Mm} = 0,32$.

2. Коэффициенты взаимной корреляции критерия усредненного риска со всеми остальными критериями: $\lambda_{AR-M} = 0$; $\lambda_{AR-L} = 0$; $\lambda_{AR-S} = 0$; $\lambda_{AR-V} = 0$; $\lambda_{AR-P} = 0$; $\lambda_{AR-MR} = 0,38$; $\lambda_{AR-Mm} = 0,56$.

3. Коэффициенты взаимной корреляции критерия рискового максимина со всеми остальными критериями: $\lambda_{Mm-M} = 0$; $\lambda_{Mm-L} = 0$; $\lambda_{Mm-S} = 0$; $\lambda_{Mm-V} = 0$; $\lambda_{Mm-P} = 0$; $\lambda_{Mm-MR} = 0,38$; $\lambda_{Mm-AR} = 0,56$.

4. Коэффициенты взаимной корреляции критерия произведения со всеми остальными критериями: $\lambda_{P-M} = 0,26$; $\lambda_{P-L} = 0,88$; $\lambda_{P-S} = 0,60$; $\lambda_{P-V} = 0,46$; $\lambda_{P-MR} = 0$; $\lambda_{P-AR} = 0$; $\lambda_{P-Mm} = 0$.

5. Коэффициенты взаимной корреляции критерия максимакса со всеми остальными

критериями: $\lambda_{M-L} = 0,34$; $\lambda_{M-S} = 0,26$; $\lambda_{M-V} = 0,22$; $\lambda_{M-P} = 0,26$; $\lambda_{M-MR} = 0,12$; $\lambda_{M-AR} = 0,02$; $\lambda_{M-Mm} = 0$.

6. Коэффициенты взаимной корреляции критерия Лапласа со всеми остальными критериями: $\lambda_{L-M} = 0,34$; $\lambda_{L-S} = 0,64$; $\lambda_{L-V} = 0,36$; $\lambda_{L-P} = 0,88$; $\lambda_{L-MR} = 0,26$; $\lambda_{L-AR} = 0$; $\lambda_{L-Mm} = 0$.

7. Коэффициенты взаимной корреляции критерия Сэвиджа со всеми остальными критериями: $\lambda_{S-M} = 0,24$; $\lambda_{S-L} = 0,64$; $\lambda_{S-V} = 0,60$; $\lambda_{S-P} = 0,60$; $\lambda_{S-MR} = 0$; $\lambda_{S-AR} = 0$; $\lambda_{S-Mm} = 0$.

8. Коэффициенты взаимной корреляции критерия Вальда со всеми остальными критериями: $\lambda_{V-M} = 0,22$; $\lambda_{V-L} = 0,36$; $\lambda_{V-S} = 0,60$; $\lambda_{V-P} = 0,46$; $\lambda_{V-MR} = 0$; $\lambda_{V-AR} = 0,02$; $\lambda_{V-Mm} = 0$.

Проанализируем семантику введенных критериев. Объединим все рассматриваемые критерии на пробной ранговой шкале, упорядочив их по мере возрастания степени их корреляции с критерием максимакса.

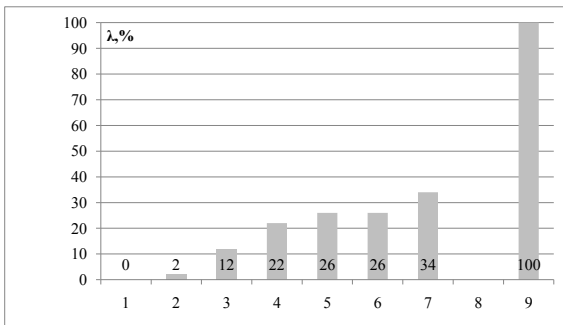


Рис. 1. Корреляция исследуемых критериев с критерием максимакса
 1 – $\lambda_{M-Mm} = 0$; 2 – $\lambda_{M-AR} = 0,02$; 3 – $\lambda_{M-MR} = 0,12$;
 4 – $\lambda_{M-V} = 0,22$; 5 – $\lambda_{M-S} = 0,26$; 6 – $\lambda_{M-P} = 0,26$;
 7 – $\lambda_{M-L} = 0,34$; 8 – «вакансия»; 9 – $\lambda_{M-M} = 1,0$

Прежде всего оказалось, что критерии, сформированные на матрице риска, проявляют явную независимость от классических критериев (к последним мы относим и критерий Сэвиджа, который, хотя и сформирован на матрице риска, с классическими критериями хорошо согласуется). Подчеркнем, что критерии, введенные на матрице риска по аналогии с классическими, со своими прототипами, вопреки ожиданиям, коррелируют либо слабо, либо вообще не коррелируют ($\lambda_{MR-M} = 0,12$; $\lambda_{AR-L} = 0$; $\lambda_{Mm-V} = 0$). К тому же, критерии усредненного риска и рисковог максимина не коррелируют ни с одним из классических критериев, включая введенный вместе с ними критерий произведения. Это обстоятельство представляет безусловный интерес и нуждается в отдельном целенаправленном исследовании.

Критерий произведения, напротив, не проявляет подобной противоречивости и показы-

вает весьма высокую степень корреляции с критерием Лапласа ($\lambda_{P-L} = 0,88$). Следует отметить также высокую пластичность этого критерия: он проявляет существенную корреляцию еще и с критериями Сэвиджа и Вальда ($\lambda_{P-S} = 0,60$; $\lambda_{P-V} = 0,46$) и заметную – с критерием максимакса ($\lambda_{P-M} = 0,26$).

Критерий рисковог максимакса коррелирует с классическим критерием максимакса существенно слабее, чем с критериями Лапласа ($\lambda_{MR-L} = 0,38$), усредненного риска и рисковог максимина, однако при этом абсолютно не коррелирует с критерием Сэвиджа, коэффициент взаимной корреляции которого с критерием Лапласа $\lambda_{S-L} = 0,64$. Можно сделать вывод о том, что природа этого критерия не позволяет рассматривать его в качестве критерия существенного риска, занимающего позицию между критериями Лапласа и максимакса на формируемой шкале оптимизма.

Это означает, что поиск критерия с требуемыми свойствами следует продолжить.

2. Обнаружение критерия с требуемыми свойствами

Помимо классического критерия максимакса, сторонник использования которого выберет в каждой строке матрицы эффективности альтернативу с максимальным значением эффективности, и отвергнутого критерия рисковог максимакса, мы ввели в рассмотрение новый критерий, который будем называть *критерием существенного риска* и обозначим K_R .

Критерий существенного риска формируется путём преобразования матрицы эффективности в ранее не использовавшуюся матрицу риска. Каждый элемент такой матрицы вводится как разность между максимальным и текущим значениями эффективности в строке (или достаточно взять разность между максимальным и минимальным значениями эффективности в строке). Затем в полученной матрице выбирается альтернатива с наибольшим значением максимума.

Приведем пример формирования критерия существенного риска.

Таблица 1

Исходные данные (матрица эффективности)

A_i	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5	Π_6	$\max(a_{ij})$
A_1	87	49	47	46	63	37	87
A_2	45	64	71	50	65	53	71
A_3	40	53	43	50	50	50	53
A_4	63	28	11	43	35	62	63
A_5	67	33	59	55	48	48	67
A_6	42	70	65	83	51	38	83

В каждой строке находится максимальное значение полезности (87; 71; 53; 63; 67; 83).

Из них вычитаются все текущие значения соответствующей строки. Рассчитывается первая строка предлагаемой матрицы риска:

$r_{11} = 87 - 87 = 0$; $r_{12} = 87 - 49 = 38$; $r_{13} = 87 - 47 = 40$; $r_{14} = 87 - 46 = 41$; $r_{15} = 87 - 63 = 24$; $r_{16} = 87 - 37 = 50$. Остальные строки матрицы рассчитываются аналогично.

Таблица 2

Трансформированная матрица риска

0	38	40	41	24	50
26	7	0	21	6	18
13	0	10	3	3	3
0	35	52	20	28	1
0	34	8	12	19	19
41	13	18	0	32	45

Из каждой строки выбирается максимальный элемент (50; 26; 13; 52; 34; 45), а затем из полученного ряда выбирается максимальное значение (в нашем случае – 52). Этот критерий рекомендует выбор альтернативы (стратегии) № 4.

Расчет степени взаимной корреляции нового критерия со всеми остальными дал следующий результат: $\lambda_{R-M} = 0,42$; $\lambda_{R-L} = 0,16$; $\lambda_{R-S} = 0,06$; $\lambda_{R-V} = 0$; $\lambda_{R-P} = 0,10$; $\lambda_{R-MR} = 0,38$; $\lambda_{R-AR} = 0,14$; $\lambda_{R-Mm} = 0,12$;

Отразим его на рис. 2.

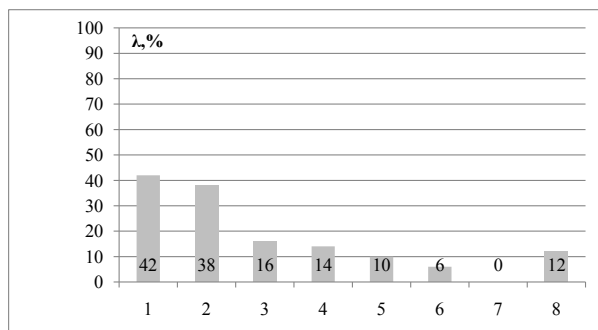


Рис. 2. Корреляции исследуемых критериев с критерием существенного риска:

$1 - \lambda_{R-M} = 0,42$; $2 - \lambda_{R-MR} = 0,38$; $3 - \lambda_{R-L} = 0,16$;
 $4 - \lambda_{R-AR} = 0,14$; $5 - \lambda_{R-P} = 0,10$; $6 - \lambda_{R-S} = 0,06$;
 $7 - \lambda_{R-V} = 0$; $8 - \lambda_{R-Mm} = 0,12$

Анализ показывает, что критерий существенного риска K_R , будучи помещенным на рис. 1, займет «вакантную» позицию между критериями Лапласа и максимакса. Можно считать, что с формированием этого критерия на строящейся порядковой шкале оптимизма критериев появилась новая градация в области рискованного выбора, которую ЛПР может выбрать в качестве более взвешенной альтернативы по отношению

к предельно рискованному критерию максимакса.

Отметим, что критерий рискованного максимакса K_{Mm} здесь снова проявляет непоследовательность, демонстрируя неожиданно заметную степень корреляции с критерием существенного риска и подтверждая тем самым эффект слабой согласованности большинства критериев, сформированных на матрице риска, с критериями, построенными на матрице эффективности. Поэтому использовать его при формировании порядковой шкалы оптимизма представляется нецелесообразным.

Таким образом, для обеспечения отношения нестрогого порядка на формируемой шкале представляется целесообразным оставить следующие критерии: Вальда, Севиджа, произведения, Лапласа, предлагаемого нами критерия существенного риска и классического максимакса. Отметим, что критерии Севиджа и существенного риска формируются на матрице риска, а остальные – на матрице эффективности.

Оценим устойчивость отношения порядка между выделенными критериями, ранжируя степень их корреляции с критерием классического максимакса (рис. 3).

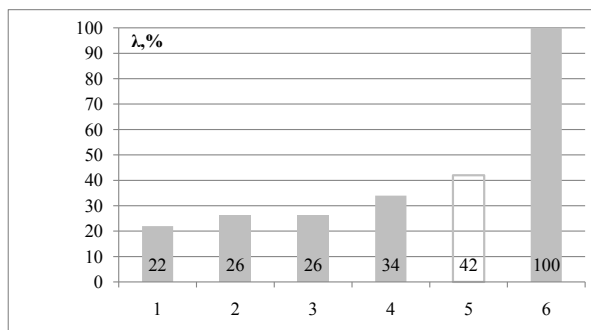


Рис. 3. Корреляции выделенных критериев с критерием максимакса:

$1 - \lambda_{M-V} = 0,22$; $2 - \lambda_{M-S} = 0,26$; $3 - \lambda_{M-L} = 0,26$;
 $4 - \lambda_{M-P} = 0,34$; $5 - \lambda_{M-R} = 0,42$; $6 - \lambda_{M-M} = 1,0$

Как видим, имеет место, в достаточной мере, плавное возрастание значений коэффициентов парной корреляции, при эквивалентности критериев Севиджа и произведения, т.е. между выделенными критериями устанавливается отношение нестрогого порядка по степени их оптимизма:

$$K_V < K_S \approx K_P < K_L < K_R < K_M. \quad (2)$$

Убедимся в устойчивости установленного порядка, ранжируя выделенные критерии по степени их парной корреляции с критерием Вальда, т.е. в обратном порядке (рис. 4).

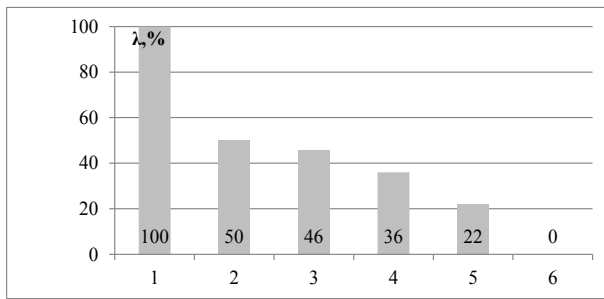


Рис. 4. Корреляции выделенных критериев с критерием Вальда

1 – $\lambda_{V-V} = 1,0$; 2 – $\lambda_{S-V} = 0,5$; 3 – $\lambda_{P-V} = 0,46$;
4 – $\lambda_{L-V} = 0,36$; 5 – $\lambda_{M-V} = 0,22$; 6 – $\lambda_{R-V} = 0$

Поскольку здесь $K_S \prec K_P$ (так же как и на рис. 2), то в порядке уточнения (2) следует считать, что между критериями Сэвиджа и произведения существует отношение «эквивалентен, или менее оптимистичен».

Как видим, сформированная группа критериев демонстрирует устойчивое отношение нестрогого порядка, что позволяет предоставить ЛПР при принятии решения дополнительный умеренно рискованный критерий, который может в большей степени отвечать системе его предпочтений по отношению к риску в тех или иных конкретных ситуациях.

Оценивание аналогичных отношений между критериями, сформированными только на матрице риска, показывает, что их взаимная корреляция имеет хаотический характер, что не позволяет их непротиворечиво упорядочить. Это обстоятельство свидетельствует о необходимости серьезного исследования семантики рискованных критериев, в том числе – с точки зрения целесообразности формирования дополнительной шкалы, альтернативной шкале оптимизма критериев, предложенной в настоящей работе.

Заключение

Проблема принятия решений в условиях неполной определенности относится к числу наиболее серьезных в практической деятельности. Поэтому столь важную роль играет формиро-

вание устойчивой системы критериев, позволяющих ЛПР реально управлять соотношением осторожности и риска в зависимости от характера конкретных ситуаций принятия решения.

В настоящей работе предложен новый критерий существенного риска, позволивший заполнить вакантную позицию между критериями Лапласа и максима и, тем самым, сформировать устойчивую порядковую шкалу оптимизма критериев. Такая шкала может оказаться полезной для ЛПР при выборе стратегий в условиях статистической неопределенности.

Литература

1. Клименко И.С., Плуталов М.А., Чеботарев Г.А. Сравнительный анализ критериев выбора стратегий в «игре с природой» // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». – 2015. – Выпуск 1. – С. 57–61.
2. Клименко И.С., Плуталов М.А., Чеботарев Г.А. К вопросу об оценивании оптимизма критериев выбора стратегий в «игре с природой» // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». – 2015. – Выпуск 2. – С. 19–23.
3. Savage, L.J. The foundation of statistics. – N.Y. : Wiley, 1954.
4. Savage, L.J. The theory of statistical decision // J. Amer. Statistic Association. – 1951. – Vol. 46. – No 253. – P. 55–67.
5. Vald, A. Contribution of the theory of statistical estimation and testing hypothesis // Annuals Math. Statist. – 1939. – Vol. 10. – P. 299–326.
6. Бродецкий Г.Л. Системный анализ в логистике. Выбор в условиях неопределенности. – М. : Academia, 2010. – 336 с.
7. Лабскер Л.Г. Теория критериев оптимальности и экономические решения. – М. : Кнорус, 2012. – 744 с.
8. Клименко И.С. Теория систем и системный анализ : учебное пособие. – М. : РосНОУ, 2014. – 256 с.