

УПРАВЛЕНИЕ СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМИ

DOI: 10.18137/RNU.V9187.26.03.P.12

УДК 330.42

Анютин Никита Дмитриевич

аспирант, Российский новый университет, Москва. ORCID: 0000-0002-5392-2151. SPIN-код: 5553-3697. AuthorID: 1214812.

Электронный адрес: blnikan@mail.ru

Nikita D. Aniutin

Postgraduate, Russian New University, Moscow. ORCID: 0000-0002-5392-2151. SPIN code: 5553-3697. AuthorID: 1214812.

E-mail address: blnikan@mail.ru

Крюковский Андрей Сергеевич

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных технологий и естественно-научных дисциплин, Российский новый университет, Москва. ORCID: 0000-0001-5670-0354. SPIN-код: 3838-1486. AuthorID: 4107.

Andrew S. Kryukovsky

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Professor at the Department of Information Technologies and Natural Sciences, Russian New University, Moscow. ORCID: 0000-0001-5670-0354. SPIN code: 3838-1486. AuthorID: 4107.

АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ

РАВНОВЕСНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА СОЛОУ

Аннотация. Рассматривается модифицированная модель экономического роста Солоу с параметром постоянного изъятия ресурсов (в качестве управляющего параметра системы). Для данной модели проводится аналитический и численный бифуркационный анализ. Показано, что при определенных значениях управляющего параметра система может испытывать бифуркцию типа «складка», при которой устойчивое состояние накопления капитала исчезает. Результаты могут быть использованы при исследовании управления режимами экономического роста.

Ключевые слова: модифицированная модель Солоу, бифуркационный анализ, бифуркация типа «складка», модель экономического роста.

Для цитирования: Анютин Н.Д., Крюковский А.С. Анализ и управление равновесными состояниями в модифицированной модели экономического роста Солоу // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2026. № 3. С. 12–19. DOI: 10.18137/RNU.V9187.26.03.P.12

ANALYSIS AND MANAGEMENT OF EQUILIBRIUM STATES IN THE MODIFIED SOLOW MODEL OF ECONOMIC GROWTH

Abstract. A modified Solow-type economic growth model is considered, with a constant resource extraction parameter (as the system's control parameter). An analytical and numerical bifurcation analysis is performed

Анализ и управление равновесными состояниями
в модифицированной модели экономического роста Солоу

for this model. It is shown that, for certain values of the control parameter, the system can experience a “fold”-type bifurcation, in which the steady state of capital accumulation disappears. The results can be used in studying the control of economic growth regimes.

Keywords: modified Solow model, bifurcation analysis, fold-type bifurcation, economic growth model.

For citation: Aniotin N.D., Kryukovsky A.S. (2026) Analysis and Control of Equilibrium States in a Modified Solow Economic Growth Model. *Vestnik of Russian New University. Series: Complex Systems: Models, Analysis and Management*. No. 3. Pp. 12–19. DOI: 10.18137/RNUV9187.26.03.P.12 (In Russian).

Введение

Модели экономического роста занимают центральное место в современной макроэкономической теории [1]. Одной из наиболее известных и широко используемых является неоклассическая модель Солоу, которая описывает динамику накопления капитала и долгосрочное равновесие экономики [1; 2].

В последние десятилетия методы нелинейной динамики и бифуркационный анализ всё шире применяются для анализа макроэкономических моделей [3]. Такой подход позволяет исследовать, каким образом изменение параметров системы может приводить к качественным изменениям её поведения, включая появление или исчезновение стационарных состояний.

В рамках данной работы рассматривается модификация модели экономического роста Солоу, предложенная в работах [4–6], которая предполагает включение дополнительного параметра вывода капитала, рассматриваемого нами в качестве управляющего параметра системы. Проводится аналитический и численный бифуркационный анализ. Показано, что при определённых значениях параметров система может испытывать бифуркацию типа «складка», при которой устойчивое состояние накопления капитала исчезает.

Теоретическая формулировка

В классической модели Солоу баланс капитала описывается формулой [1]

$$dK/dt = I(t) - \delta K(t), \quad (1)$$

где dK – приращение совокупного капитала; $I(t)$ – инвестиции; δ – амортизация; t – время.

Инвестиции $I(t)$, в свою очередь, описываются выражением [1]

$$I(t) = \rho F(K(t), L(t)), \quad (2)$$

то есть фиксированная доля выпуска идет в инвестиции.

Рассмотрим функцию Кобба – Дугласа:

$$F(K(t), L(t)) = AK(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha}. \quad (3)$$

Подставив в формулу (1) выражения (2) и (3) получим

$$\dot{K} = \rho AK(t)^\alpha - L(t)^{1-\alpha} - \delta K(t). \quad (4)$$

Выполнив переход к переменной на работника $k = K/L$ и введя обозначение $\dot{L} = nL$, получим

$$\dot{k} = \rho AK^\alpha - (\delta + n)k - S = \rho AK^\alpha - \lambda k - S, \quad (5)$$

где $k(t)$ – капитал одного работника в момент времени t ; $A > 0$ – уровень технологий; $\rho > 0$ – параметр интенсивности инвестиций; $0 < \alpha < 1$ – параметр производственной функции; $\lambda > 0$ – эффективная норма выбытия капитала; $S > 0$ – параметр постоянного изъятия капитала.

В отличие от классической модели Солоу наличие постоянного изъятия S существенно изменяет динамику системы. В частности, при определённых значениях параметров модель может иметь несколько стационарных состояний или вовсе не иметь положительных равновесий. Именно поэтому данный параметр рассматривается нами как управляющий параметр системы.

Стационарные решения уравнения (5) удовлетворяют условию

$$f(k, S) = \rho AK^\alpha - \lambda k - S = 0. \quad (6)$$

Согласно теории катастроф вид складки (A_2) возникает при одновременном выполнении условий

$$f(k, S) = 0, f_k(k, S) = 0. \quad (7)$$

Из производной $f_k(k, S)$ можно определить критическую точку количества капитала на одного работника k_{crit} как

$$k_{crit} = \left(\frac{\alpha \rho A}{\lambda} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (8)$$

Из выражения (8) можно получить критическое значение параметра S_{crit} :

$$S_{crit} = \rho AK_{crit}^\alpha - \lambda k_{crit}. \quad (9)$$

Рассматриваемая динамическая система (6) является одномерной, в силу чего допускает представление в градиентной форме:

$$\dot{k} = -dV/dk, \quad (10)$$

где $V(k, S)$ – потенциальная функции.

Интегрируя (10), получим

$$V(k, S) = -\frac{\rho A}{\alpha + 1} k^{\alpha+1} + \frac{1}{2} \lambda k^2 + Sk. \quad (11)$$

Таким образом, стационарные состояния совпадают с экстремумами потенциала.

Обсуждение численного эксперимента

Сначала рассмотрим стационарные состояния k , используя выражение (5) в зависимости от постоянного изъятия капитала S при различных значениях интенсивности инвестиций (ρ), производственной функции (эластичности α) и эффективной норме выбытия капитала (λ) (см. Рисунок 1). Уровень технологий всегда был равен единице ($A = 1$). Соответствие между цветами кривых и параметрами расчета представлено в легенде. Данная бифуркационная диаграмма имеет характерную форму с двумя ветвями, которые соответствуют устойчивым равновесиям. Наличие нескольких стационарных состояний означает, что экономика может находиться в различных устойчивых режимах при одинаковых значениях параметров. Из Рисунка 1 видно, что изменение параметров (α , ρ , λ) влияет не на сам тип поведения, а на положение и ширину ветвей.

Анализ и управление равновесными состояниями
в модифицированной модели экономического роста Солоу

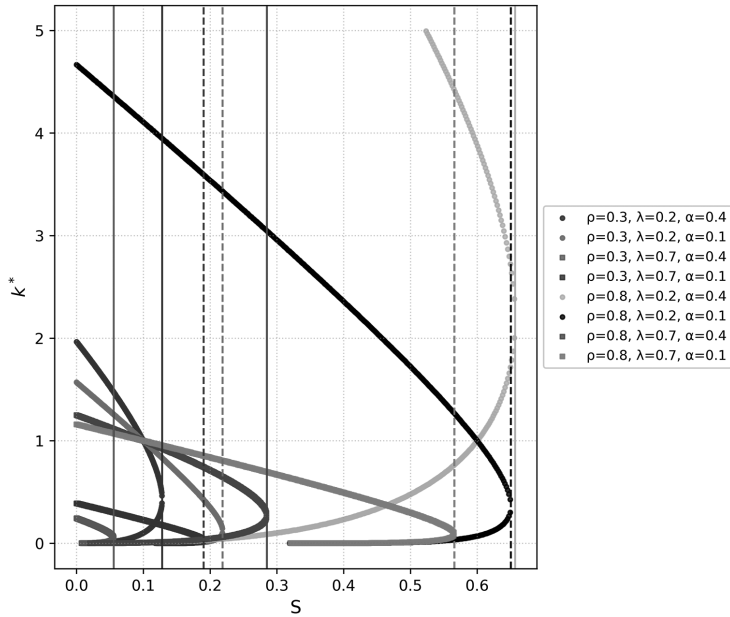


Рисунок 1. Бифуркационная картина для различных параметров системы

Источник: здесь и далее рисунки выполнены авторами по результатам исследования

Для более глубокого анализа механизма бифуркации рассмотрим эквивалентное представление через потенциальную функцию (11). На Рисунке 2 представлена зависимость формы потенциальной функции от параметра k при различных значениях изъятия капитала S . Остальные параметры расчета: $A = 1,0$; $\alpha = 0,4$; $\rho = 0,3$; $\lambda = 0,2$. Для удобства визуального сравнения графиков потенциальная функция нормирована с точностью до аддитивной константы $V(k_{crit}, S)$. Стационарные состояния системы $f(k, S) = 0$ (7) соответствуют экстремумам потенциала функции $V(k, S)$. При этом локальные минимумы $V(k, S)$ соответствуют равновесиям, а максимумы — неустойчивостям. Описанное поведение соответствует бифуркации типа «складка» (fold), при которой происходит слияние и исчезновение пары равновесий.

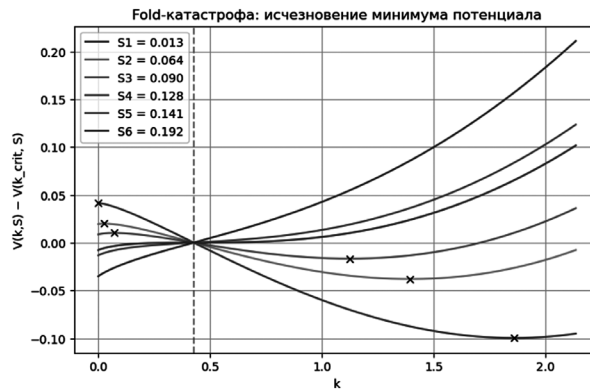


Рисунок 2. Зависимость формы потенциальной функции от параметра k

Построим бифуркационную картину для медленно меняющегося параметра α (см. Рисунок 3). Параметры расчета: $\alpha \in [0,01; 0,99]$ и $A = 1$; $\rho = 0,5$; $\lambda = 0,4$. Соответствие между значением α представлено около графика, тогда как черная линия отображает критические значения, определяемые условием (7) (или множество fold-точек).

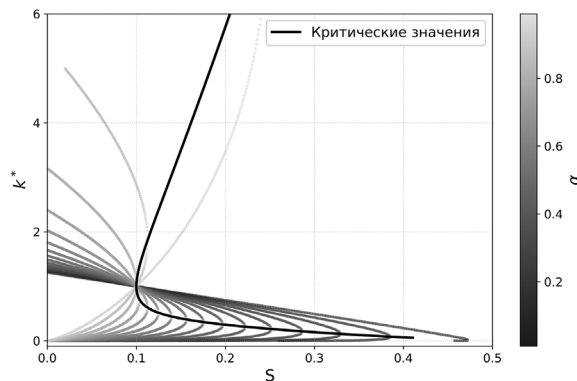


Рисунок 3. Бифуркационная диаграмма с каустикой

Теперь исследуем, как изменяется геометрия линий критических значений при варьировании параметров A , ρ , λ . При изменении параметра $A \in [0,1; 1]$ (см. Рисунок 4) происходит масштабное растяжение кривых fold-точек, а значения k_{crit} и S_{crit} возрастают. Таким образом, параметр A отвечает за масштабирование системы вверх и вправо в плоскости (S, k) (с геометрической точки зрения). Параметра ρ входит в модель аналогично параметру A и также усиливает производственный эффект. Изменение параметра в диапазоне $\rho \in [0,1; 1]$ (см. Рисунок 5) приводит к росту k_{crit} , и линия критических значений сдвигается в область больших значений k и S , а ее форма сохраняется, изменяется только ее масштаб. Следовательно, параметры A и ρ оказывают сходное качественное влияние на геометрию линий максимумов. Параметр $\lambda \in [0,1; 1]$ отвечает за «затухание» капитала. При увеличении этого параметра: уменьшается k_{crit} и S_{crit} , а кривые максимумов сжимаются и смещаются к началу координат (представлено на Рисунке 6). Таким образом, λ действует противоположно параметрам A и ρ , реализуя сжатие бифуркационной структуры.

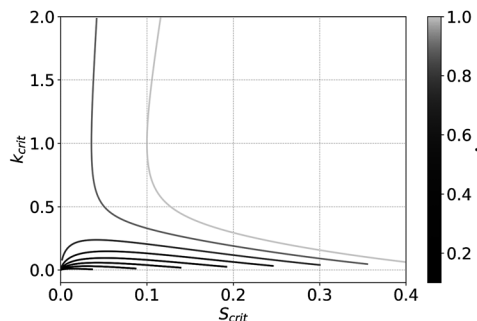


Рисунок 4. Семейство критических точек для различных значений A

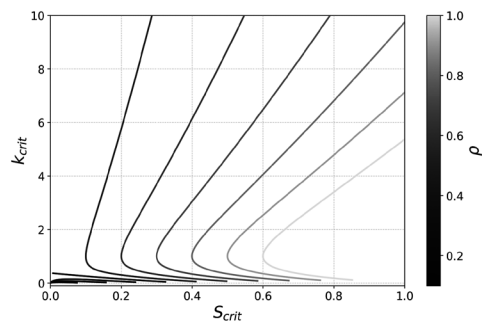


Рисунок 5. Семейство каустик для различных значений ρ

Анализ и управление равновесными состояниями
в модифицированной модели экономического роста Солоу

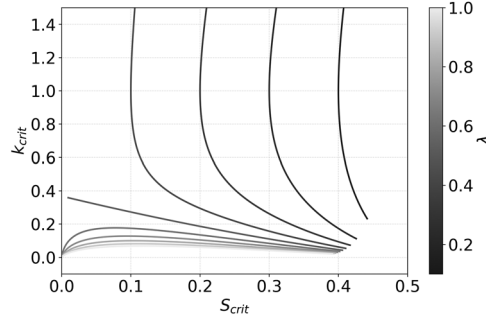


Рисунок 6. Семейство каустик для различных значений λ

**Масштабная инвариантность и универсальная геометрия
бифуркационной структуры**

Исследуем бифуркационную структуру модели на предмет скрытой масштабной инвариантности и возможность сведения семейства решений к универсальной форме. Воспользуемся условием критической точки (7) и выражениями для S_{crit} (9) и k_{crit} (8), после чего выполним упрощение:

$$S_{crit} = \lambda k_{crit} \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right). \quad (12)$$

Для удобства введем безразмерные переменные:

$$x = k/k_{crit} = \tilde{k}, y = S/S_{crit} = \tilde{S}. \quad (13)$$

Тогда $k = xk_{crit}$, $S = yS_{crit}$, а после в выражение (7) выполним подстановку (13):

$$yS_{crit} = -\lambda xk_{crit} + \rho Ax^{\alpha}k_{crit}^{\alpha}. \quad (14)$$

После выполнения упрощения получим выражение

$$y = \frac{x^{\alpha} - \alpha x}{1 - \alpha}. \quad (15)$$

Возвращаясь к обозначениям (13), получаем безразмерное уравнение равновесий:

$$\tilde{S} = \frac{\tilde{k}^{\alpha} - \alpha \tilde{k}}{1 - \alpha}. \quad (16)$$

Следовательно, формула (16) показывает, что после нормировки на критические масштабы k_{crit} и S_{crit} уравнение стационарных состояний полностью освобождается от параметров A , ρ , λ . Следовательно, при фиксированном значении α все равновесные кривые, построенные для различных наборов параметров (A, ρ, λ) , в нормированных координатах совпадают. Для подтверждения аналитически полученной безразмерной редукции была проведена серия численных экспериментов для различных наборов параметров (A, ρ, λ) при фиксированном значении показателя $\alpha = 0,4$.

На Рисунке 7, а представлены исходные зависимости $S(k)$, соответствующие различным параметрическим режимам, соответствие между кривыми и параметрами расчета

представлено около графика. Из рисунка видно, что форма и масштаб кривых существенно различаются. Для каждой кривой была выполнена нормировка по критическим масштабам и построены зависимости в безразмерных координатах. Результаты нормировки представлены на Рисунке 7, б. Наблюдается, что все кривые совпадают и ложатся на одну и ту же универсальную зависимость, которая полностью определяется параметром α и задаётся формулой (16).

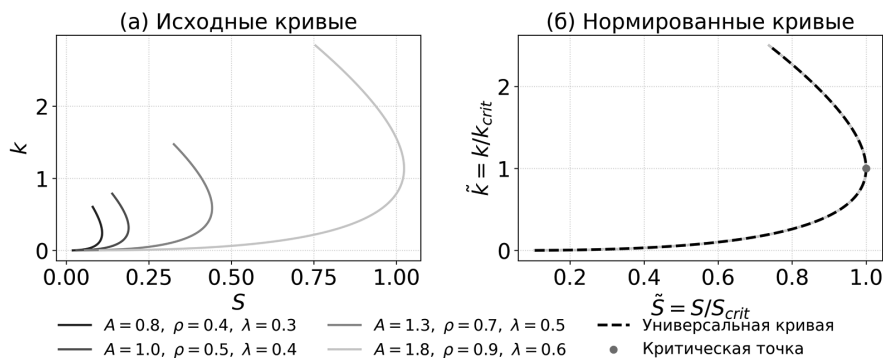


Рисунок 7. Бифуркационные кривые стационарных состояний при фиксированном значении параметра $\alpha = 0,4$ для различных наборов параметров (A, ρ, λ)

Таким образом, численные результаты подтверждают, что параметры (A, ρ, λ) влияют исключительно на масштаб системы, тогда как геометрическая форма множества стационарных состояний определяется только показателем α .

Заключение

В результате исследования показано, что модифицированная модель экономического роста Солоу демонстрирует классическую бифуркацию типа «складка». Численные эксперименты полностью подтверждают результаты теоретического анализа. Полученные результаты допускают интерпретацию: при превышении некоторого критического уровня управляющего воздействия (параметра S) происходит исчезновение стационарных состояний, что может соответствовать катастрофическому коллапсу экономической системы. Показано, что модифицированная модель Солоу допускает естественную масштабную редукцию, при которой множество стационарных состояний описывается универсальным безразмерным уравнением, зависящим только от показателя α . Все различия между исходными бифуркационными диаграммами, соответствующими различным значениям параметров (A, ρ, λ) , сводятся к аффинному масштабированию по переменным k и S , тогда как их безразмерная геометрия остается инвариантной.

Литература

1. Калемаев В.А. Математическая экономика. М.: ЮНИТИ, 1998. 240 с.
2. Модель экономического роста Р. Солоу: генезис теории и методологии / С.С. Муллахмедова [и др.] // Региональные проблемы преобразования экономики. 2019. № 12 (110). С. 7–15. DOI: 10.26726/1812-7096-2019-12-7-15

Анализ и управление равновесными состояниями
в модифицированной модели экономического роста Солоу

3. Куликов Д.А. Устойчивость и локальные бифуркации в модели Солоу с запаздыванием // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 2. С. 225–234. DOI: 10.15507/2079-6900.20.201802.225-234
4. Крюковский А.С., Шевцова Е.В. Применение теории катастроф для анализа и численного моделирования макроэкономических показателей в модели Солоу // Цивилизация знаний: российские реалии : сборник трудов международной конференции. 2007. С. 129–135.
5. Крюковский А.С., Шевцова Е.В. Особенности численного моделирования макроэкономических показателей // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2007. Вып. 2. С. 81–90.
6. Крюковский А.С., Шевцова Е.В. Особенности типа катастроф в трехсекторной макроэкономической модели // Цивилизация знаний: инновационный переход к обществу высоких технологий : Труды IX Международной научной конференции, Москва, 25–26 апреля 2008 г. М. : РосНОУ, 2008. Часть I. С. 321–328.

References

1. Kalemaev V.A. (1998) *Matematicheskaya ekonomika* [Mathematical Economics]. Moscow: UNITI Publishing, 240 p. (In Russian).
2. Mullakhmedova S.S. [et al.] (2019) R. Solow's Economic Growth Model: Genesis of Theory and Methodology. *Regional Problems of Economic Transformation*. No. 12(110). Pp. 7–15. DOI: 10.26726/1812-7096-2019-12-7-15 (In Russian).
3. Kulikov D.A. (2018) Stability and Local Bifurcations in the Solow Model with Delay. *Journal of the Middle Volga Mathematical Society*. Vol. 20. No. 2. Pp. 225–234. DOI: 10.15507/2079-6900.20.201802.225-234 (In Russian).
4. Kryukovsky A.S., Shevtsova E.V. (2007) *Primenenie teorii katastrof dlya analiza i chislenного modelirovaniya makroekonomicheskikh pokazateley v modeli Solou* [Application of Catastrophe Theory to the Analysis and Numerical Modeling of Macroeconomic Indicators in the Solow Model]. Knowledge Civilization: Russian Realities : Proceedings of the International Conference. Pp. 129–135. (In Russian).
5. Kryukovsky A.S., Shevtsova E.V. (2007) Features of Numerical Modeling of Macroeconomic Indicators. *Vestnik of Russian New University. Series: Complex Systems: Models, Analysis and Management*. Is. 2. Pp. 81–90. (In Russian).
6. Kryukovsky A.S., Shevtsova E.V. (2008) *Osobennosti tipa katastrof v trekhsektornoy makroekonomicheskoy modeli* [Features of the Type of Catastrophes in a Three-Sector Macroeconomic Model]. Civilization of Knowledge: Innovative Transition to a High-Technology Society : Proceedings of the IX International Scientific Conference, Moscow, April 25–26, 2008. Moscow : RosNOU. Part I. Pp. 321–328. (In Russian).

Поступила в редакцию: 08.06.2026

Поступила после рецензирования: 03.08.2026

Принята к публикации: 17.08.2026

Received: 08.06.2026

Revised: 03.08.2026

Accepted: 17.08.2026